MASARYKOVA UNIVERZITA • EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA

Lucie Doudová
David Hampel
Zuzana Hrdličková
Jaroslav Michálek
Hana Pytelová
Marek Sedlačík

SBÍRKA ÚLOH Z PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY

BRNO 2006 preprint

1. Množiny

Příklad 1.1. Buďte $A = \{1, 2, 5, 7\},\ B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$ množiny. Na základní množině $M = \{0, 1, \dots, 10\}$ určete:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $\overline{A \cup B}$

d) $A - B$

e) $B - A$

f) $\overline{A \cap B}$

g) $\overline{A - B}$

h) $\overline{B - A}$

i) $\overline{A} \cap B$

j) $\overline{A} \cap \overline{B}$

k) $\overline{A} \cup B$

l) $\overline{A \cup \overline{B}}$

Příklad 1.2. Buďte $A = \{0, 1, 3, 4, 9\},\ B = \{1, 2, 3, 5, 8, 9, 10\},\ C = \{1, 3, 5, 11\}$ množiny. Na základní množině $M = \{0, 1, \dots, 11\}$ určete:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $(A \cap B) \cup C$

c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

d) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

e) $\overline{A} \cup (B \cap \overline{C})$

f) $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$

g) $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A} \cup C)$

h) $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A \cap C})$

i) $(\overline{A \cap \overline{B}}) \cap (\overline{A} \cup C)$

j) $(A \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

Příklad 1.3. Pro konečné množiny $A,\ B$ znázorněte pomocí Vennova diagramu de Morganova pravidla.

Příklad 1.4. Uvažujeme 100 vybraných firem v ČR. Označme
A_1={firmy, které v roce 2003 exportovaly}
A_2={firmy, které měly v roce 2003 více jak 100 zaměstnanců}
A_3={firmy, které dosáhly v roce 2003 zisku}.

a) Znázorněte množiny A_1, A_2, A_3 pomocí Vennova diagramu (předpokládáme, že všechny možné kombinace zmíněných vlastností firem jsou zastoupeny).

b) Znázorněte a slovně popište následující množiny:
$\overline{A_1},\ A_1 \cap A_2,\ A_2 \cup A_3,\ \bigcap_{i=1}^{3} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{3} A_i,\ A_1 - A_2$

c) Ověřte de Morganova pravidla (slovně i graficky).

Příklad 1.5. Nechť A, B, C jsou množiny. Na základní množině M znázorněte pomocí Vennova diagramu:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $A \div B$

e) $\overline{A}$

f) $\overline{B} \cap C$

g) $\overline{A} \cap B$

h) $A \cap B \cap C$

i) $A \cap B \cap \overline{C}$

j) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}$

Příklad 1.6. Určete všechny možné podmnožiny množiny $M = \{3, -4, 5\}$.

Příklad 1.7. Nechť A, B, C jsou množiny. Na základní množině M zjednodušte:

a) $(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A)$

b) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (B \cup \overline{A})$

c) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup [(B \cup C) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})]$

d) $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (\overline{\overline{A} \cup C})]$

Příklad 1.8. Nechť A, B, C jsou množiny. Na základní množině M zjednodušte:

a) $A \cup (B \cap \overline{A})$

b) $(\overline{A \cup B}) \cup (\overline{A \cup \overline{B}})$

c) $[A \cup [B \cap (\overline{A \cap B})]] \cup [\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})} \cap (\overline{B \cup C})]$

d) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

Příklad 1.9. Nechť A, B, C, D jsou množiny. Na základní množině M ověřte rovnost:

a) $A \cup (A \cap B) = A$

b) $A \cap B \cap C \cap \overline{D} = (A \cap B \cap \overline{D}) \cap (C \cup D)$

c) $(\overline{A} \cap B) \cap \overline{C} = (\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (B \cap \overline{A} \cap \overline{C})$

d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

2. Integrál

Příklad 2.1. Vypočtěte obsah jednotkového kruhu.

Příklad 2.2. Vypočtěte obsah plochy omezené křivkou $y = e^{-x}$, osami x, y a přímkou $x = 1$.

Příklad 2.3. Určete obsah plochy pod křivkou $y = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$ na intervalu $\langle -2, 5 \rangle$.

Příklad 2.4. Vypočtěte obsah plochy omezené křivkami
$x^2 + y^2 = 8$ a $y = \frac{x^2}{2}$.

$\left[2\pi + \frac{4}{3}\right]$

Příklad 2.5. Vypočtěte obsah plochy omezené křivkami
$y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$ a $y = 0$.

$\left[\frac{16}{3}\right]$

Příklad 2.6. Pro $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ vypočtěte:

$$\int\limits_0^5 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \,.\, \lambda_2 e^{-\lambda_2(5-x)}\, dx.$$

$\left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-5\lambda_2} - e^{-5\lambda_1})\right]$

Příklad 2.7. Vypočtěte:

$$\int\limits_0^\infty x \,.\, \frac{1}{3} \,.\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

$\left[\frac{1}{6}\sqrt{2\pi}\right]$

Příklad 2.8. Je dána množina

$$M = \{[x, y] \in R^2 : y \le e^{-2x+1},\ x \in (0, 1),\ y \ge 0\}.$$

Vypočtěte obsah této množiny.

$\left[\frac{e^2-1}{2e}\right]$

Příklad 2.9. Vypočtěte:

$$\int x^5 lnx \, dx.$$

$\left[\frac{x^6}{6}(\ln x - \frac{1}{6}) + c\right]$

Příklad 2.10. Je dána funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 3 \\ 0 & \text{pro } x \leq 3 \end{cases}$$

Pro $\lambda > 0$ vypočtěte:

$$\int_{-3}^{\infty} \varphi(x) \, dx.$$

$\left[e^{-3\lambda}\right]$

Příklad 2.11. Je dána funkce

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } -4 \leq x < -2 \\ -3x + 2 & \text{pro } -2 \leq x < 0 \\ e^{-2x} & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ x^{-2} & \text{pro } 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vypočtěte:

$$\int_{-5}^{\infty} g(x) dx.$$

$\left[\frac{442}{15} - \frac{1}{2e^4}\right]$

Příklad 2.12. Vypočtěte objem útvaru vymezeného funkcí

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a předpisem $x + y \leq 1$.

Příklad 2.13. Je dána množina

$$M = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \ x_1.x_2 \leq k, \ 0 < x_i \leq 1, \ i = 1, 2\}.$$

Pro $0 < k < 1$ vypočtěte:

$$\int \int_M dx_1 dx_2.$$

$[k - k \ln k]$

Příklad 2.14. Vypočtěte
$$\int\int_G 2x_1x_2\; dx_1dx_2,$$
kde
$$G = \{(x_1, x_2) \in R^2 :\; x_1 + x_2 \le 1,\; 0 \le x_i < 1,\; i = 1, 2\}.$$

$\left[\frac{1}{12}\right]$

3. Kombinatorika

Nejdříve připomeneme základní pojmy.

Počet uspořádaných dvojic: Ze dvou konečných množin $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vybíráme uspořádané dvojice typu $[a_l, b_k]$, kde $a_l \in A$, $b_l \in B$. Všechny možné dvojice sestavíme do tabulky tak, že dvojice $[a_l, b_k]$ bude v l-tém řádku a k-tém sloupci. Každá dvojice bude v tabulce zapsána právě jednou, tedy počet uspořádaných dvojic z m a n prvkových množin je mn.

Počet uspořádaných k-tic: Nyní přejděme ke k množinám $A, B \ldots, X$, jejich počet prvků bude po řadě $n_1, \ldots, n_k$. Z těchto množin vybíráme uspořádanou k-tici prvků $[a_i, b_j, \ldots, x_l]$ tak, že $a_i \in A$, $b_j \in B, \ldots, x_l \in X$. Pokud bychom uvažovali pouze 3 množiny, vezmeme všechny uspořádané dvojice z prvních dvou množin za prvky nové množiny. Z předchozího víme, že má tato množina $n_1 n_2$ prvků. Nyní tedy můžeme pohlížet na trojici $[a, b, c]$ jako na dvojici $[[a, b], c]$. Zřejmě má $n_1 n_2 n_3$ prvků. Matematickou indukcí pak zjistíme, že z k množin, kde i-tá má n_i prvků, $i = 1, \ldots, k$, můžeme vytvořit $n_1 \times \cdots \times n_k$ uspořádaných k-tic.

Variace: Je dán n prvkový základní soubor $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Libovolnou uspořádanou k-tici $[a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}]$, $a_{j_1} \in A, \ldots, a_{j_k} \in A$ budeme nazývat uspořádaný výběr rozsahu k ze základního souboru. Počet všech takových výběrů bude zřejmě záležet na tom, zda se prvky v k-tici mohou, nebo nemohou opakovat. Když se prvky v uspořádaném výběru nemohou opakovat, tvoří tento uspořádaný výběr variaci bez opakování k-té třídy z n prvků. Když se mohou opakovat, tvoří uspořádaný výběr variaci s opakováním k-té třídy z n prvků.

Počet variací bez opakování: Předpokládejme, že $n \geq k$. Pak první prvek výběru může být vybrán z n možných prvků základního souboru, druhý už pouze z $n-1$ prvků atd. Variace bez opakování tedy odpovídá uspořádané k-tici vybrané postupně z množin rozsahu $n_1 = n,\ n_2 = n-1, \ldots, n_k = n-k+1$. Tedy počet variací bez opakování je $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Zřejmě $(n)_k = 0$ pro $k > n$. Pro $x \in \mathrm{R}$ klademe $(x)_k = x(x-1) \times \cdots \times (x-k+1)$.

Počet permutací bez opakování Pokud $n = k$ udávají variace bez opakování počet všech uspořádání n prvkové množiny a nazývají se permutace. Počet permutací je $(n)_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$. Klademe $0! = 1$.

Počet variací s opakováním: Jak bylo řečeno, pokud se prvky ze základního souboru mohou v uspořádaném výběru opakovat, mluvíme o variaci s opakováním (uspořádaném výběru s opakováním). Každý prvek výběru rozsahu k volíme z n prvků základního souboru. Variace s opakováním tedy odpovídá uspořádané k-tici, když $n_1 = \ldots = n_k = n$. Proto je počet variací s opakováním k-té třídy z n prvků roven n^k.

Kombinace: Nyní budeme před předpokládat, že z n prvkového základního souboru $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ vybíráme k-prvkový soubor, přičemž na uspořádání prvků ve výběru nezáleží. Libovolný takový vybraný soubor nazýváme kombinací k-té třídy z n prvků. Pokud se prvky v kombinaci nemohou opakovat, mluvíme o kombinaci bez opakování, v opačném případě o kombinaci s opakováním. Kombinace k-té třídy z n prvků tedy odpovídají neuspořádanému výběru rozsahu k z n prvkového základního souboru.

Počet kombinací bez opakování: Předpokládejme nejdříve, že se prvky v neuspořádaném výběru nemohou opakovat. Prvky každého takového výběru mohou být uspořádány $k!$ způsoby. Z předchozího víme, že počet všech variací bez opakování je $(n)_k$. Tedy pokud počet všech kombinací bez opakování rozsahu k z n prvků označíme x, pak $xk! = (n)_k$. Odtud $x = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ pro $k \leq r$. Klademe $\binom{n}{k} = 0$ pro $k > n$ a $\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}$ pro $x \in \mathrm{R}$.

Počet kombinací s opakováním: Kombinací s opakováním rozumíme neuspořádaný výběr k prvků, které vybíráme z n-prvkové základní množiny tak, že se vybírané prvky mohou opakovat (a na pořadí vybraných prvků nezáleží). Jejich počet odpovídá počtu všech rozkladů čísla k na součet $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, kde $k_i \geq 0$ je počet výskytů i-tého prvku základního souboru ve vybraném souboru, $i = 1, \ldots, n$. Libovolnou kombinaci s opakováním můžeme zapsat pomocí posloupnosti „$*$” a „|”. Např. kombinace s opakováním ze základní množiny $M = \{a_1, a_2, a_3\}$ může být tvořena prvky a_1, a_3, a_1, a_1. Tuto kombinaci z opakováním, kdy prvek a_1 byl vybrán třikrát, prvek a_2 nebyl vybrán a prvek a_3 byl vybrán právě jednou, lze znázornit pomocí posloupnosti symbolů „$*$” a „|” typu $| * * * || * |$. Přičemž počet „$*$” mezi sousedními prvky typu „|” chápeme jako počet prvků v přihrádce, vymezené dvěma následnými symboly „|” (tzv. hranice přihrádek). Když v dané posloupnosti uvedených symbolů nepočítáme pevné krajní hranice přihrádek, je délka takové posloupnosti $k + (n - 1)$ (k-krát je obsažena „$*$” a $(n - 1)$-krát je obsažena hranice přihrádky „|”). Protože umístěním hranic přihrádek „|” na místa této posloupnosti jednoznačně určíme jednu z možných kombinací s opakováním, odpovídá počet kombinací s opakováním počtu všech rozmístění $(n-1)$ hranic přihrádek „|” na vybraná místa posloupnosti délky $k+(n-1)$. Rozmístění tedy můžeme popsat jako neuspořádaný výběr rozsahu $n - 1$ hranic přihrádek „|” z množiny $n + k - 1$ pozic. Tedy počet všech kombinací s opakováním je roven $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Počet permutací s opakováním: Nyní hledáme počet způsobů, jakými může být rozděleno n prvků základní množiny do k množin, kde první má n_1, druhá n_2 a poslední n_k prvků. Předpokládáme, že má být rozděleno všech n prvků základní množiny, tj. $n = n_1 + \dots + n_k$. Nejprve vybereme do první množiny n_1 prvků ze základní množiny, n_2 prvků pro druhou množinu vybíráme už pouze ze zbylých $n - n_1$ prvků základní množiny, atd. Po výběru do $(k-1)$-vé množiny už zbývá pouze n_k prvků pro výběr do k-té množiny. Tedy počet všech těchto rozmístění je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{(k-1)}}{n_k}.$$

Po rozepsání kombinačních čísel a úpravě dostáváme, že počet těchto rozmístění je

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Toto číslo udává počet uspořádání n prvkové množiny, kde je n_1 stejných prvků typu 1, ..., n_k stejných prvků typu k. Taková uspořádání se nazývají permutace s opakováním.

Vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{n} & & & & & & & & & \\
0 & & & & & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Binomická věta

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \ \dots \ + \binom{n}{n} x^n y^0$$

$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ … počet všech podmnožin n-prvkové množiny

$\binom{n}{k}$ … počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny

Příklad 3.1. Zjistěte, čemu je rovno $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$\left[\binom{n+1}{k+1}\right]$

Příklad 3.2. Zjistěte, čemu je rovno

a) $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4}$

b) $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{20}{2}$

$[\binom{9}{5}\binom{21}{3}]$

Příklad 3.3. Ověřte, že platí vztah $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ pro $a = 3$, $b = 4$, $n = 5$.

[21]

Příklad 3.4. Řešte následující rovnice:

a) $\binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x} = 4$

b) $\binom{x+1}{1}^3 + 6\binom{x+1}{2} - 6\binom{x}{3} = 9x^2 - 25$

$[\text{a) } x = 5,\ (x = -2 \text{ nevyh.}),\ \text{b) ?}]$

Příklad 3.5. Sečtěte vybraný řádek Pascalova trojúhelníka.

$[2^n]$

Příklad 3.6. Ukažte, že platí:

a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

b) $\binom{n}{0} +\ 2\binom{n}{1} +\ 2^2\binom{n}{2} +\ 2^3\binom{n}{3} + \ldots +\ 2^n\binom{n}{n} = 3^n$

Příklad 3.7. Zjistěte,

a) kolik přirozených pěticiferných čísel lze utvořit z číslic $1, 5, 6, 8, 9$.

b) Dále zjistěte počet přirozených čtyřciferných čísel, která lze utvořit z číslic $1, 5, 6, 8, 9$, v případě, že se číslice nesmějí opakovat a

c) také v případě, že se číslice opakovat mohou.

$\left[\text{a) } 5!,\ \text{b) } 120,\ \text{c) } 5^4\right]$

Příklad 3.8. Kolika způsoby lze rozesadit 5 žen a 5 mužů kolem kulatého stolu tak, aby žádné dvě osoby téhož pohlaví neseděly vedle sebe?

$[2 \cdot 5! \cdot 5!]$

Příklad 3.9. Kolik přirozených čísel menších než 5000 lze vytvořit z číslic 0, 3, 4, 5, jestliže se žádná číslice neopakuje?

[42]

Příklad 3.10. Vojenskou kolonu budou tvořit dva terénní vozy UAZ, tři auta Praga V3S a čtyři Tatry 138. Kolika způsoby lze kolonu seřadit, jestliže

a) stejná vozidla mají jet za sebou

b) stejná vozidla mají jet za sebou a přitom terénní vozy UAZ musí být před vozy Tatra 138

c) na pořadí vozidel nejsou kladeny žádné podmínky

$[\text{a) } 3!, \text{ b) } 3, \text{ c) } 1260]$

Příklad 3.11. Při výrobě určité součástky je třeba provést čtyři operace A, B, C, D, pro které platí následující podmínky:

1. Operace B nesmí být první a operace A nesmí být poslední.

2. Operaci C musíme provést dříve než operaci D.

Kolik různých postupů existuje při výrobě této součástky?

[7]

Příklad 3.12. Tři muži a dvě ženy hledají místo. Ve městě jsou tři závody, kde berou jen muže, dva, kde berou jen ženy a dva, kde berou muže i ženy. Kolika způsoby se může pětice lidí rozmístit do těchto závodů?

[2000]

Příklad 3.13. Je dáno k předmětů, které se mají rozmístit do n rozlišitelných přihrádek. Kolika způsoby to lze provést, jsou-li předměty

a) rozlišitelné,

b*) nerozlišitelné.

$\left[\text{a) } n^k, \text{ b) } \binom{n-1+k}{k}\right]$

Příklad 3.14. Je dáno k předmětů, které se mají rozmístit do n rozlišitelných přihrádek tak, aby v každé přihrádce byl alespoň jeden předmět. Kolika způsoby to lze provést, jsou-li předměty nerozlišitelné.

$\left[\binom{k-1}{k-n}\right]$

Příklad 3.15. Je dáno k předmětů a n rozlišitelných přihrádek. Kolik existuje způsobů rozmístění předmětů do přihrádek, když v předem dané přihrádce má být právě r předmětů, jsou-li předměty

a) rozlišitelné,

b*) nerozlišitelné.

$$\left[\text{a) } \binom{k}{r}(n-1)^{k-r}, \text{ b) } \binom{n-2+k-r}{k-r}\right]$$

Příklad 3.16. Kolika způsoby lze rozmístit k předmětů do n rozlišitelných přihrádek, má-li být právě m přihrádek prázdných $(0 \le m \le n)$, jsou-li předměty nerozlišitelné.

$$\left[\binom{n}{m}\binom{k-1}{k-n+m}\right]$$

Příklad 3.17. Je dáno n přihrádek. Do první přihrádky máme umístit k_1 předmětů, atd., až do n-té přihrádky k_n předmětů. Předměty jsou rozlišitelné a jejich celkový počet je $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Kolika způsoby lze rozmístění provést?

$$\left[\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\right]$$

Příklad 3.18. * Existují čtyři krevní skupiny, které označujeme A, B, AB, 0. Určete počet všech možností rozdělení deseti osob podle uvedených krevních skupin.

$$[286]$$

Příklad 3.19. * Kolika způsoby lze rozmístit do devíti přihrádek sedm bílých a dvě černé koule?

$$\left[\binom{10}{2}\binom{15}{7}\right]$$

Příklad 3.20. * Kolika způsoby si mohou 4 děti rozdělit 10 modrých, 15 červených a 8 zelených kuliček, jestliže každé dítě musí dostat alespoň 1 kuličku každého druhu?

$$\left[\binom{9}{3}\binom{14}{3}\binom{7}{3}\right]$$

Příklad 3.21. * Ve výzkumném ústavu pracuje 67 lidí. Z nich 47 ovládá angličtinu, 35 němčinu, 20 francouzštinu, 23 němčinu a angličtinu, 12 angličtinu a francouzštinu, 11 němčinu a francouzštinu a 5 lidí všechny tři jazyky. Kolik pracovníků ústavu neovládá žádný z těchto jazyků?

$$[6]$$

Příklad 3.22. * Do výtahu pětiposchoďové budovy nastoupilo 8 osob. Kolika způsoby se mohou rozmístit do jednotlivých poschodí, když v každém poschodí vystoupí alespoň jedna osoba?

$$[126000]$$

4. Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$

$$+ \ \ldots \ + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Geometrická pravděpodobnost

$$Q(B) = \frac{mes(B)}{mes(G)}$$

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ \ldots \ \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

4.1 Klasická pravděpodobnost

Příklad 4.1. Při hodu 2 kostkami budeme sledovat součet ok na obou kostkách. S jakou pravděpodobností dostaneme součet

a) roven 6,

b) větší než 7?

$$\left[\text{a) } 0,139; \text{ b) } 0,417.\right]$$

Příklad 4.2. Při hodu 3 kostkami budeme sledovat součet ok na všech třech kostkách.

a) S jakou pravděpodobností dostaneme součet 8?

b) Který součet je pravděpodobnější, 9 nebo 10?

$$\left[\text{a) } 0,097; \text{ b) } 10.\right]$$

Příklad 4.3. Paradox Chevaliera de Méré. Ch. de Méré pozoroval, že při házení třemi kostkami padá součet 11 častěji než součet 12, i když podle jeho názoru (nesprávného) mají oba součty stejnou pravděpodobnost. Stanovte pravděpodobnost obou jevů.

$$\left[\text{a) } 0.125, \text{ b) } 0.1157.\right]$$

Příklad 4.4. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami bude

a) součin

b) součet

ok sudé číslo.

$$[0.75;\ 0.5.]$$

Příklad 4.5. Hodíme třikrát jednou mincí. Určete pravděpodobnost, že

a) padne dvakrát líc a jednou rub,

b) padne třikrát líc,

c) padne třikrát rub,

d) padne jednou líc a dvakrát rub.

$$\left[\text{a) } p = 3/2^3, \text{ b) } p = 1/2^3, \text{ c) } p = 1/2^3, \text{ d) } p = 3/2^3.\right]$$

Příklad 4.6. Hodíme pětkrát mincí. Jaká je pravděpdobnost, že líc padne právě třikrát?

$[0.3125.]$

Příklad 4.7. Hodíme n-krát mincí. Jaká je pravděpdobnost, že líc padne právě k-krát?

$[\binom{n}{k}/2^n.]$

Příklad 4.8. Z úplné hry 32 karet vytáhneme dvakráte po sobě po jedné kartě, při čemž první kartu nevracíme zpět do hry. Jaká je pravděpodobnost, že obě vytažené karty jsou esa?

$[3/248.]$

Příklad 4.9. Z úplné hry karet vytáhneme 2-krát po sobě po jedné kartě, při čemž první kartu vrátíme zpět do hry. Jaká je pravděpodobnost, že obě vytažené karty jsou téže barvy?

$[1/4.]$

Příklad 4.10. Určete pravděpodobnost toho, že lze sestrojit trojúhelník ze třech úseček, které náhodně vybereme

a) ze 4 úseček o délkách 4, 6, 8 a 10,

b) z 5 úseček o délkách 5, 8, 10, 13 a 15.

$[\text{a) } 3/4;\ \text{b) } 7/10.]$

Příklad 4.11. Čísla $1, 2, \dots, n$ jsou náhodně uspořádána. Určete pravděpodobnost toho, že čísla a) 1 a 2, b) 1, 2 a 3 jsou uspořádána hned vedle sebe v uvedeném pořádku.

$[\text{a) } n^{-1},\ \text{b) } 1/(n(n-1)).]$

Příklad 4.12. Hráč A háže šesti hracími kostkami a vyhraje, pokud padne alespoň jedna jednička. Hráč B háže dvanácti hracími kostkami a vyhrává, pokud padnou alespoň dvě jedničky. Kdo má větší pravděpodobnost výhry?

Příklad 4.13. Najděte pravděpodobnost toho, že mezi k náhodně vybranými číslicemi nebudou žádné dvě stejné.

$\left[p_k = \frac{10!}{(10-k)!}10^{-k}.\right]$

Příklad 4.14. Ve výtahu, který zastavuje v n poschodích, $n \geq k$, je na začátku k osob. Jaká je pravděpodobnost p toho, že žádné dvě osoby nevystoupí ve stejném poschodí, když předpokládáme, že osoba volí poschodí, v němž vystoupí náhodně a nezávisle na ostatních osobách.

$[p = n^{-k}n!/(n-k)!.]$

Příklad 4.15. Házíme n hracích kostek. Určete pravděpodobnost toho, že padne n_1 jedniček, ..., n_6 šestek, $n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n$.

$[p = n!/(n_1!n_2! \ldots n_6! \cdot 6^n).]$

Příklad 4.16. Určete pravděpodobnost toho, že ve výběru s opakováním mezi třemi náhodně vybranými číslicemi

a) všechny 3 číslice budou shodné,

b) právě 2 číslice budou shodné,

c) žádné 2 číslice nebudou shodné.

Řešte podobnou úlohu pro výběr čtyř cifer.

$[$a) $p_1 = 0,01,\ p_2 = 0,27,\ p_3 = 0,72,$ b) $p_1 = 0,001,\ p_2 = 0,063,\ p_3 = 0,432,\ p_4 = 0,504.]$

Příklad 4.17. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Vytáhneme dvakrát po sobě vždy po jedné kouli, přičemž první kouli nevrátíme zpět. Určete pravděpodobnost, že

a) obě vytažené koule jsou bílé,

b) první koule je bílá a druhá černá,

c) první koule je černá a druhá bílá,

d) jedna koule bude černá a druhá bíla, přičemž nezáleží na jejich pořadí,

e) druhá vytažená koule je bílá.

$\Big[$a) $p = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$, b) $p = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$, c) $p = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$, d) $p = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$, e) $p = \frac{a(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a}{(a+b)}.\Big]$

Příklad 4.18. V osudí jsou 3 koule bílé a 5 koulí černých. Vytáhneme dvakráte po sobě vždy po jedné kouli a první kouli nevrátíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je bílá?

$[3/8.]$

Příklad 4.19. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Vytáhneme k-krát po sobě vždy po jedné kouli, přičemž po žádném tahu kouli nevrátíme zpět. Určete pravděpodobnost, že poslední vytažená koule je bílá.

$\Big[p = \frac{a(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-k+1)} = \frac{a}{(a+b)}.\Big]$

Příklad 4.20. Narozeniny k lidí představují výběr s opakováním rozsahu k ze souboru všech dnů v roce. Roky nemají stejnou délku, a víme, že porodnost během roku nezůstává stálá. Nicméně v prvním přiblížení je možné předpokládat, že v roce je 365 dnů a uvažovat náhodný výběr lidí místo náhodného výběru dnů narozenin. Při těchto předpokladech určete pravděpodobnost toho, že všech k dnů narozenin je v různých dnech.

$\left[p = 365^{-k} 365!/(365-k)!.\right]$

Příklad 4.21. Předpokládejme, že se 3 lidé setkali zcela náhodně. Určete pravděpodobnost, že

a) nemají narozeniny společně v 1 den (každý má narozeniny v jiný den v roce),

b) alespoň 2 osoby z těchto 3 mají narozeniny společně v 1 den,

c) právě 2 osoby z těchto 3 mají narozeniny společně v 1 den.

Pozn.: přestupný rok neuvažujte.

$\left[\text{a) } 0,9918;\ \text{b) } 0,0082;\ \text{c) } 8,197 \cdot 10^{-3}.\right]$

Příklad 4.22. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne

a) na každé kostce jiné číslo,

b) samé jedničky,

c) právě pět jedniček,

d) právě čtyři jedničky,

e) alespoň čtyři jedničky,

f) samá lichá čísla,

g) všechna čísla stejná,

h) právě k jedniček.

$\left[\text{a) } \frac{6!}{6^6},\ \text{b) } \frac{1}{6^6},\ \text{c) } \frac{5}{6^5},\ \text{d) } \frac{375}{6^6},\ \text{e) } \frac{406}{6^6},\ \text{f) } \frac{1}{2^6},\ \text{g) } \frac{1}{6^5},\ \text{h) } \binom{6}{k} 5^{6-k}.\right]$

Příklad 4.23. Ve skupině studentů je 7 mužů a 4 ženy. Jaká je pravděpodobnost, že v sestaveném šestičlenném volejbalovém týmu budou alespoň dvě ženy?

[0.803.]

Příklad 4.24. Pepík dostal sáček s deseti bonony, z nichž bylo pět ovocných a pět mentolových. Ze sáčku náhodně vybral šest bonbonů, které rozdělil kamarádům. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi byly dva mentolové?

$\left[\frac{5}{21}.\right]$

Příklad 4.25. V urně je 6 červených, 3 modré a 3 bílé koule. Vytáhneme 4 koule. Určete pravděpodobnost, že

a) všechny 4 koule budou červené,

b) 3 koule budou červené a 1 modrá,

c) 2 koule budou červené, 1 modrá a 1 bílá.

$[\mathrm{a})\ 0,030;\ \mathrm{b})\ 0,121;\ \mathrm{c})\ 0,273.]$

Příklad 4.26. Z 52 hracích karet náhodně vybereme 13 karet. Stanovte pravděpodobnost, že mezi těmito kartami bude 5 ♠, 4 ♣, 3 $\diamondsuit$ a 1 $\heartsuit$.

$\left[\binom{13}{5}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{1}/\binom{52}{13}.\right]$

Příklad 4.27. Při bridži obdrží hráč 13, při pokru 5 z 52 hracích karet. Určete pravděpodobnost toho, že hráč a) bridže b) pokru dostane karty různých hodnot (barvy karet se mohou shodovat).

$\left[\mathrm{a})\ 4^{13}/\binom{52}{13} \doteq 0,0001057,\ \mathrm{b})\ 4^5\binom{13}{5}/\binom{52}{5} \doteq 0,5071.\right]$

Příklad 4.28. V osudí je a koulí bílých a b koulí černých. Jedním tahem vytáhneme $(\alpha + \beta)$ koulí. Určete pravděpodobnost, že vytáhneme právě α bílých a β černých koulí.

$\left[p = \binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}/\binom{a+b}{\alpha+\beta}.\right]$

Příklad 4.29. V osudí je n lístků očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, n$. Vytáhneme najednou m lístků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vytaženými lístky bude k lístků označeno předem danými čísly?

$\left[p = \binom{k}{k}\binom{n-k}{m-k}/\binom{n}{m}.\right]$

Příklad 4.30. Úplná sada 32 karet je rozdána mezi 4 hráče. Jaká je pravděpodobnost, že jeden určitý hráč má

a) všechna 4 esa,

b) 2 esa a 1 krále,

c) 3 zelené a 2 červené karty?

$[\mathrm{a})\ 0,002;\ \mathrm{b})\ 0,097;\ \mathrm{c})\ 0,083.]$

Příklad 4.31. Pokud se naučíte ke zkoušce z 50 otázek pouze 25, jakou máte pravděpodobnost, že ze tří vytažených otázek budete znát

a) všechny 3,

b) právě 2?

$[\text{a) } 0,117; \text{ b) } 0,383.]$

Příklad 4.32. V tombole na plesu bylo prodáno 960 losů a je připraveno 20 věcných cen. Pokud jste zakoupili 5 losů, s jakou pravděpodobností vyhrajete

a) 1 cenu,

b) alespoň 1 cenu?

c) Vysvětlete, proč je pravděbodobnost pod a) menší než pod b).

$[\text{a) } 0,096; \text{ b) } 0,100.]$

Příklad 4.33. Ve Sportce se z osudí obsahujícího 49 čísel losuje bez vracení 6 čísel. Sázející označí na sázence 6 čísel. Jaká je pravděpodobnost

a) výhry v 1. pořadí (uhádnutí všech 6 vylosovaných čísel),

b) výhry v 5. pořadí (uhádnutí 3 vylosovaných čísel),

c) že sázející neuhádne žádné vylosované číslo?

$\left[\text{a) } 7,151 \cdot 10^{-8}; \text{ b) } 1,765 \cdot 10^{-2}; \text{ c) } 0,436.\right]$

Příklad 4.34. V dodávce 100 kusů stolních ventilátorů je 5 vadných. Ke kontrole této dodávky vybereme náhodně 4 kusy. Jaká je pravděpodobnost, že mezi kontrolovanými ventilátory

a) nebude žádný vadný,

b) bude 1 vadný,

c) bude alespoň 1 vadný?

$[\text{a) } 0,812; \text{ b) } 0,176; \text{ c) } 0,188.]$

Příklad 4.35. Bedna obsahuje 90 dobrých a 10 vadných součástek. Určete pravděpodobnost toho, že mezi 10 vybranými součástkami není žádná vadná.

$\left[\frac{90!}{80!} \Big/ \frac{100!}{90!} \doteq 0,330476.\right]$

Příklad 4.36. (Odhad velikosti populace) Předpokládejme, že z rybníku bylo vyloveno tisíc ryb, které byly následně označeny barvou a vypuštěny zpět. Při dalším odlovu tisíce ryb se ukázalo, že sto z nich bylo označených. Z pozorovaného výsledku odhadněte nejpravděpodobnější velikost populace ryb v rybníku.

[Označme n neznámý počet ryb v rybníku. Ze zadání je zřejmé, že $n \geq 1900$. Pravděpodobnost, že v druhém výlovu bylo 100 označených ryb je $p_{100}(n) = \binom{1000}{100}\binom{n-1000}{900}/\binom{n}{1000}$. Nejpravděpodobnější počet ryb v rybníku zjistíme maximalizací pravděpodobnosti $p_{100}(n)$. Hledáme největší n pro které poměr $p_{100}(n)/p_{100}(n-1) = (n-1000)^2 n^{-1}(n-1900)^{-1} \geq 1$. Tedy sledovaný jev má největší pravděpodobnost pro $n = 10000$.]

Příklad 4.37. Technická kontrola prověřuje výrobky ze sady skládající se z m výrobků prvního druhu a n výrobků druhého druhu. Zkouška prvních b výrobků $(b < n)$ náhodně vybraných ze sady ukázala, že všechny byly druhého druhu. Určete pravděpodobnost toho, že mezi dalšími dvěma výrobky vybranými z dosud neprověřených nejvýše jeden výrobek bude druhého druhu.

$\Big[1 - \binom{m}{2}/\binom{m+n-b}{2}$. Odečítaný výraz je pravděpodobností, že oba výrobky jsou prvního druhu.$\Big]$

Příklad 4.38. Hodíme n-krát po sobě jednou hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padne „šestka”?

$\left[p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.\right]$

Příklad 4.39. Házíme n-krát po sobě dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň při jednom hodu padne součet 12?

$\left[p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n.\right]$

Příklad 4.40. Kolikrát musíme házet hrací kostkou, aby první padnutí „šestky” mělo pravděpodobnost a) větší než 0,5 b) větší než 0,8 c) větší než 0,9?

$\left[\text{a) } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.5, n \geq 4, \text{ b) } n \geq 9, \text{ c) } n \geq 13.\right]$

Příklad 4.41. Kolikrát musíme házet dvěma hracími kostkami, abychom s pravděpodobností větší než 1/2 očekávali, že aspoň jednou padne součet ok rovný 12?

$\left[1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0.5, n \geq 25.\right]$

Příklad 4.42. Kolika způsoby můžeme čtyřem dětem rozdat 10 různých duhových kuliček tak, aby Jirka dostal právě 3 kuličky?

$\left[\binom{10}{3}4^{-10}(3)^7.\right]$

Příklad 4.43. Uvažujme rozmístění k koulí do n osudí. Určete pravděpodobnost toho, že předem vybrané osudí obsahuje právě r koulí.

$\left[\binom{k}{r}n^{-k}(n-1)^{k-r}.\right]$

Příklad 4.44. Při bridži je všech 52 hracích karet rozděleno čtyřem hráčům. Stanovte pravděpodobnost, že každý hráč dostane jedno eso.

$$\left[4!\frac{48!}{(12!)^4}\Big/\frac{52!}{(13!)^4} = 0,105.\right]$$

Příklad 4.45. Skupina se skládá z 5 mužů a 10 žen. Určete pravděpodobnost toho, že při jejich náhodném rozdělení do 5 skupin po třech lidech bude v každé skupině muž.

[Při rozdělování 15 lidí do 5 trojic je možno první trojici vybrat $\binom{15}{3}$ způsoby, druhou $\binom{12}{3}$, atd... Tedy všech uskupení do 5 trojic je $\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 15!/(3!)^5$. Podobnou úvahou zjistíme, že existuje $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ seskupení 10 žen do 5 dvojic, přičemž ke každému seskupení je možno přidat libovolnou z permutací 5 mužů, tj. $p = 10!5!(3!)^5/(2^5 15!) = 81/1001.$]

Příklad 4.46. Devět cestujících náhodně nastoupí do tří vagónů. Každý cestující zvolí vagón náhodně a nezávisle na ostatních cestujících. Jaká je pravděpodobnost toho, že

a) v každém vagóně sedí 3 cestující,

b) v jednom vagóně sedí 4, v druhém 3 a ve třetím 2 cestující?

$$\left[\text{a) } p = \frac{9!}{(3!)^3 3^9},\ \text{b) } \frac{9!}{4!3!2!3^9}.\right]$$

Příklad 4.47. Čtyři studenti si na stůl položili čtyři sklenice s vínem. Po chvíli se ke stolu vrátili a sklenice si vzali náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z nich si vzal svoji sklenici?

$[0.625.]$

Příklad 4.48. V osudí je r koulí očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, r$. Táhneme n-krát po sobě po jedné kouli, přičemž každou vytaženou kouli vracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel, jimiž jsou vytažené koule očíslovány, je roven číslu s? $(n \le s \ \le nr)$ [Spočtěte koeficient u mocniny x^s v polynomu $(x + x^2 + \ldots + x^r)^n$]

$$\left[p = \frac{1}{r^n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{s-ir-1}{n-1}(-1)^i,\ \text{kde } k = [\tfrac{s-n}{r}].\right]$$

Příklad 4.49. V osudí je n koulí očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, n$. Vytáhneme n-krát po sobě po jedné kouli, přičemž vytažené koule nevracíme zpět. Osudí tedy vyprázdníme. Řekneme, že pro kouli s číslem i nastane setkání, pokud ji vytáhneme právě v i-tém tahu. Určete pravděpodobnost, že

a) pro kouli s číslem i nenastane setkání,

b) ani pro kouli s čísle i ani pro kouli s číslem k nenastane setkání, $i \neq k$.

$\left[\text{a) } p = \frac{n!-(n-1)!}{n!} = 1 - \frac{1}{n}, \text{ b) } p = \frac{n!-2(n-1)!+(n-2)!}{n!} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n(n-1)}.\right]$

Příklad 4.50. Z balíčku 52 karet náhodně vybereme 6 karet. Určete pravděpodobnost toho, že mezi těmito kartami budou zástupci všech čtyřech barev.

[Pravděpodobnost, že mezi 6 kartami nejsou ani jednou ♠, je rovna $\binom{39}{6}/\binom{52}{6}$. To je pravděpodobnost nepřítomnosti karet jedné libovolné barvy. Tedy pravděpodobnost, že mezi 6 kartami není nějaká barva, je rovna $4\binom{39}{6}/\binom{52}{6}$. Pravděpodobnost, že nejsou zastoupeny dvě dané barvy, je $\binom{26}{6}/\binom{52}{6}$, že nejsou zastoupeny tři dané barvy je $\binom{13}{6}/\binom{52}{6}$. Celkem $p = 1 - 4\binom{39}{6}/\binom{52}{6} + 6\binom{26}{6}/\binom{52}{6} - 4\binom{13}{6}/\binom{52}{6}$.]

4.2 Geometrická pravděpodobnost

Příklad 4.51. Hodiny, které je třeba natahovat, se zastavily. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička

a) zastavila mezi šestkou a osmičkou

b) nezastavila mezi trojkou a pětkou

c) zastavila přesně na dvanácti

[a) 1/6, b) 5/6, c) 0.]

Příklad 4.52. Proti síti se čtvercovými oky o straně 8 cm je kolmo hozen míček o průměru 5 cm. Jaká je pravděpodobnost, že míček proletí sítí?

[0.141.]

Příklad 4.53. V obdélníku o rozměrech 10 x 15 je zakreslena kružnice o poloměru 4 a čtverec o straně 4. V obdélníku zvolíme náhodně bod N. Určete pravděpodobnost toho, že tento bod

a) leží uvnitř kružnice,

b) neleží uvnitř čtverce.

[a) $0,335$, b) $0,893$.]

Příklad 4.54. Výskyt náhodných čísel lze simulovat na počítačích pomocí tzv. generátoru pseudonáhodných čísel (jedná se o umělou tvorbu náhodných čísel). Předpokládejme, že necháme vygenerovat pseudonáhodná čísla rovnoměrně rozložená do intervalu (0;1); výskyt každého čísla z tohoto intervalu je tedy stejně možný. Jaká je pravděpodobnost, že poslední číslo z 50 vygenerovaných čísel

a) bude z intervalu (0,3; 0,5),

b) bude větší než 0,7?

[a) $0,2$, b) $0,3$.]

Příklad 4.55. Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel, z nichž žádné není větší než jedna, bude nejvýše roven jedné a jejich součin nebude větší než $\frac{2}{9}$?
[$\Omega = \{[x, y] |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},\ A = \{[x, y] |\ [x, y] \in \Omega,\ x + y \leq 1,\ xy \leq \frac{2}{9}\}$, $p \doteq 0,487$.]

Příklad 4.56. V kruhu o poloměru r se v daném směru vedou tětivy. Všechny průsečíky tětiv s průměrem kolmým k danému směru jsou stejně možné. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně zvolené tětivy je nejvýše r?
[$p = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \doteq 0,134$.]

Příklad 4.57. Mezi dvěma stanovištěmi, vzdálenými od sebe 600 metrů, je natažený telefonní kabel. Určete pravděpodobnost, že bod, ve kterém došlo k přerušení kabelu, bude od prvního stanoviště vzdálen

a) více než 75 metrů

b) nejvýše 100 metrů

[a) 0.875, b) 0.167.]

Příklad 4.58. Nákladní auto vozí několikrát denně cement z cementárny na 20km vzdálené staveniště. Jaká je pravděpodobnost, že v případě poruchy zůstane auto stát

a) nejdále 4 km od cementárny nebo staveniště

b) více než 8 km od cementárny nebo staveniště

[a) 0.4, b) 0.2.]

Příklad 4.59. Na úsečce o délce l se náhodně umístí dva body tak, že se úsečka rozdělí na tři části. Určete pravděpodobnost toho, že z tří vzniklých úseček lze sestavit trojúhelník.
[Označme $x,\ y$ délky dvou úseček. $\Omega = \{[x, y] |\ 0 \leq x + y \leq l\}$, $A = \{[x, y] |\ [x, y] \in \Omega,\ x \leq l/2,\ y \leq l/2,\ x + y \geq l/2\},\ p = 0,25$.]

Příklad 4.60. Jaká je pravděpodobnost toho, že z tří náhodně zvolených úseček, dlouhých nejvýše l, bude možno sestrojit trojúhelník?
[Označme $x,\ y,\ z$ délky úseček. $\Omega = \{[x, y, z] |\ 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq y \leq l,\ 0 \leq z \leq l\}$, $A = \{[x, y, z] |\ [x, y, z] \in \Omega,\ x + y \geq z,\ x + z \geq y,\ y + z \geq x\},\ p = 0,5$.]

Příklad 4.61. Dva parníky musí přirazit k témuž přístavišti. Příjezdy obou parníků jsou nezávislé a stejně možné během celého dne. Určete pravděpodobnost toho, že jeden z parníků bude muset čekat na uvolnění přístaviště, jestliže první parník stojí v přístavišti jednu hodinu a druhý dvě hodiny.

[Označme $x,\ y$ doby příjezdu parníků. $\Omega = \{[x,y] |\ 0 \leq x \leq 24,\ 0 \leq y \leq 24\}$, $A = \{[x,y] |\ [x,y] \in \Omega,\ y - x \leq 1,\ x - y \leq 2\}$. $p = 0,121$.]

Příklad 4.62. Na železniční trati se provádí opravy, takže vlaky můžou jezdit pouze po jedné koleji. Dva vlaky jedoucí v opačném směru, mohou tímto úsekem projet v průběhu třiceti minut v kteroukoli dobu se stejnou pravděpodobností. Určete pravděpodobnost, že jeden vlak nebude muset čekat na druhý, potřebuje-li první vlak na projetí celého úseku pět minut a druhý vlak tři minuty.

[0.752.]

Příklad 4.63. Dvě osoby se dohodly, že se setkají na stanoveném místě mezi 17. a 18. hodinou. Ten, kdo přijde jako první, počká na toho druhého 15 minut a potom odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají, je-li příchod obou v libovolném okamžiku dohodnutého intervalu stejně možný?

[$7/16$.]

Příklad 4.64. Dvě osoby mají stejnou pravděpodobnost, že přijdou nezávisle na sobě na dohodnuté místo v libovolném okamžiku časového intervalu T. Jaká je pravděpodobnost, že jeden člověk bude čekat na druhého nejvýše po dobu t?

$\left[1 - (\frac{T-t}{T})^2.\right]$

Příklad 4.65. Na zastávku přijíždí autobus linky A každých 15 min. a autobus linky B každých 20 min. Určete pravděpodobnost, že od okamžiku, kdy cestující přijde na tuto zastávku, přijede

a) autobus A dříve než autobus B,

b) autobus A nebo autobus B do 5 minut.

[a) $5/8$, b) $1/2$.]

Příklad 4.66. (Buffonova úloha) V rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzdálenost je L. Určete pravděpodobnost, že náhodně vržená jehla délky l $(l < L)$ protne kteroukoliv přímku.

[Označme x vzdálenost jehly od nejbližší přímky, φ úhel, který svírá jehla s touto přímkou. $\Omega = \{[x,\varphi] |\ 0 \leq x \leq L/2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, $A = \{[x,\varphi] |\ [x,\varphi] \in \Omega,\ x \leq (l/2)\sin\varphi\}$, $p = \frac{2l}{L\pi}$.]

4.3 Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 4.67. Hodíme dvěmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padla alespoň jedna šestka, když víme, že součet ok padlých na 1. a 2. kostce je 8?

$[2/5]$

Příklad 4.68. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

$[1/7]$

Příklad 4.69. Z osudí, ve kterém je m bílých a n černých koulí, vytáhneme postupně bez vracení dvě koule. Zjistili jsme, že první vytažená koule je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude také bílá?

$\left[\frac{m-1}{m+n-1}\right]$

Příklad 4.70. Zjistili jsme, že při hodu deseti hracími kostkami padla aspoň jedna jednička. Jaká je pravděpodobnost, že padly 2 anebo více jedniček?

$\left[\frac{6^{10}-3\cdot 5^{10}}{6^{10}-5^{10}} \doteq 0,615\right]$

Příklad 4.71. Dokažte, že jsou-li A a B neslučitelné jevy a $\mathrm{P}(A \cup B) \neq 0$, pak

$$\mathrm{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)}.$$

Příklad 4.72. Nechť $\mathrm{P}(A|B) = 0,7$, $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = 0,3$, $\mathrm{P}(B|A) = 0,6$. Vypočtěte $\mathrm{P}(A)$.

$[21/46]$

Příklad 4.73. Firma odebírá stejné výrobky od dvou dodavatelů. Od prvního dodavatele odebírá měsíčně 8000 výrobků, ze kterých je 10% vadných. Od druhého dodavatele odebírá měsíčně 2000 výrobků, ze kterých je 5% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z měsíční dodávky je vadný a pochází

a) od prvního dodavatele,

b) od druhého dodavetele.

$[\mathrm{a})\ 0.08,\ \mathrm{b})\ 0.01]$

Příklad 4.74. Ze sedmi výrobků jsou tři vadné. Náhodně vybereme dva výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že jsou

a) oba kvalitní,

b) právě jeden vadný,

c) oba vadné?

[a) $2/7$, b) $4/7$, c) $1/7$]

Příklad 4.75. V osudí je deset koulí očíslovaných čísly $0, 1, \ldots, 9$. Náhodně vybereme jednu kouli, poznamenáme její číslo a kouli nevrátíme zpět. Stejným způsobem vybereme i druhou a třetí kouli. Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme číslo 253?

[$1/720$]

Příklad 4.76. Z osudí, ve kterém je 6 bílých a 4 černé koule, vybereme třikrát bez vracení po jedné kouli. Označme A_1 jev: „1. vybraná koule je černá”, A_2 jev: „2. vybraná koule je bílá”, A_3 jev: „3. vybraná koule je černá”. Vypočtěte pravděpodobnost společného nastoupení jevů $A_1,\ A_2,\ A_3$.

[0.1]

Příklad 4.77. Z karetní hry o 32 kartách vytahujeme postupně 6 krát po sobě bez vracení po jedné kartě. Jaká je pravděpodobnost, že desítka bude tažena až v posledním tahu?

[0.0723]

Příklad 4.78. Ke kulatému stolu, kde je $2n$ míst, si náhodně posedá n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

$\left[\frac{2(n!)^2}{(2n)!}\right]$

Příklad 4.79. V krabici je n levých a n pravých rukavic stejného druhu. Postupně vybíráme vždy dvě rukavice a nevracíme je zpět. Jaká je pravděpodobnost, že ve všech takto vytažených párech bude levá i pravá rukavice?

$\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\right]$

Příklad 4.80. Jsou dána tři osudí, pravděpodobnost volby každého osudí je stejná. První osudí obsahuje 1 bílou, 2 modré a 3 červené koule. Druhé osudí obsahuje 2 bílé koule, 1 modrou a 1 červenou kouli. Třetí osudí obsahuje 4 bílé koule, 3 modré koulí a 3 červené. Náhodně zvolíme jedno osudí a vytáhneme z něj dvě koule a zjistíme, že jedna z těchto vytažených koulí je bíla a druhá červená. Jaká je pravděpodobnost, že tyto koule pocházejí

a) z prvního osudí,

b) z druhého osudí,

c) ze třetího osudí?

[a) $1/4$, b) $5/12$, c) $1/3$]

Příklad 4.81. Z osudí, které obsahuje m bílých $(m > 3)$ a n černých koulí, se ztratila jedna koule. Proto, abychom určili obsah osudí, vybereme z osudí dvě koule. Zjistili jsme, že jsou bílé. Jaká je pravděpodobnost, že ztracená koule je bílá?

$$\left[\frac{m-2}{m+n-2}\right]$$

Příklad 4.82. Z osudí, které obsahuje 3 bílé a 2 černé koule, byly naráz vybrány dvě koule. Ty byly vloženy do druhého osudí, které předtím obsahovalo 4 bílé a 4 černé koule. Jaká je pravděpodobnost, že po tomto přemístění bude z druhého osudí vytažena bílá koule?

$[0.52]$

Příklad 4.83. Osudí obsahuje n koulí. Všechny možné počty bílých koulí v osudí jsou stejně pravděpodobné. Zjistili jsme, že koule náhodně vybraná z osudí je bílá. Stanovte pravděpodobnost všech možných původních počtů bílých koulí v osudí. Jaký je nejpravděpodobnější původní počet bílých koulí v osudí?

$$\left[\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n+1}, \mathrm{P}(H_i|B) = \frac{2i}{n(n+1)}, \text{nejpravděpodobnější je } n \text{ koulí v osudí}\right]$$

Příklad 4.84. Osudí obsahuje celkem 10 koulí, z nichž některé jsou bílé a některé černé. Počet bílých koulí a černých koulí však není přesně znám. Víme jenom, že osudí bylo naplněno tímto způsobem: 10-krát po sobě bylo hozeno jednou mincí a pokud padl rub, byla do osudí vložena bílá koule, pokud padl líc, byla do osudí vložena černá koule. Z takto naplněného osudí bylo vytaženo m-krát po sobě po jedné kouli, přičemž po každém tahu byla vytažená koule vrácena zpět do osudí. Po provedení těchto m tahů bylo zjištěno, že všech m koulí bylo bílých. Stanovte pravděpodobnost, že

a) dané osudí obsahovalo pouze bílé koule, tj. 10 bílých a žádné černé koule.

b) dané osudí obsahovalo jednu bílou a devět černých koulí.

$$\left[\text{a) } \mathrm{P}(H_{10}|A) = \frac{10^m}{\sum_{i=1}^{10}\binom{10}{i}i^m}, \text{ b) } \mathrm{P}(H_1|A) = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10}\binom{10}{i}i^m}\right]$$

Příklad 4.85. Pojištovací společnost rozlišuje při pojišťování tři skupiny řidičů - A, B, C. Pravděpodobnost toho, že řidič patřící do skupiny A bude mít během roku nehodu, je 0.02, zatímco u řidiče ze skupiny B je to 0.07 a u řidiče ze skupiny C je to 0.11. Z dlouhodobého sledování společnost odhadla, že 50% pojistných smluv je uzavřeno s řidiči ze skupiny A, 30% s řidiči ze skupiny B a 20% s řidiči ze skupiny C. Jaká je pravděpodobnost, že řidič, který měl nehodu, patří do skupiny a) A, b) B, c) C?

$[\text{a) } 1/53, \text{ b) } 21/53, \text{ c) } 22/53]$

Příklad 4.86. Jsou dána tři stejná osudí. První osudí obsahuje 2 bílé, 1 modrou a 3 červené koule. V druhém osudí jsou 4 bílé, 3 modré a 2 červené koule. Třetí osudí obsahuje 1 bílou, 2 modré a 1 červenou kouli. Náhodně zvolíme osudí a z toho vytáhneme postupně dvě koule, přičemž žádnou vytaženou kouli nevracíme zpět. Ukázalo se, byla vytažena jedna modrá a jedna červená koule. Jaká je pravděpodobnost, že koule byly vybrány z

a) z prvního osudí,

b) z druhého osudí,

c) ze třetího osudí?

$[\text{a) } 2/7, \text{ b) } 5/21, \text{ c) } 10/21]$

Příklad 4.87. Z osudí, které obsahuje 5 bílých a 5 černých koulí, bylo vytaženo 5 koulí a vloženo do jiného prázdného osudí. Z tohoto osudí byly vytaženy 3 koule a vloženy do třetího prázdného osudí. Z tohoto třetího osudí byla vytažena jedna koule a bylo zjištěno, že je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že všech 5 koulí, vytažených z prvního osudí, bylo bílých?

$[\mathrm{P}(H_5|A) = 1/126]$

Příklad 4.88. (Úloha Chevailera de Méré) a) Hodíme n krát jednou kostkou. Označme A jev: „šestka padne alespoň jednou.” Jaké musí být minimální n, aby pravděpodobnost, že nastane jev A byla alespoň 0.6? b) Hodíme n krát po sobě dvěma kostkami. Označme B jev: „součet 12 padne alespoň jednou”. Jaké musí být minimální n, aby jev B nastal alespoň s pravděpodobností 0.6?

$[\text{a) } 6, \text{ b) } 19]$

Příklad 4.89. Každé z $N+1$ osudí obsahuje N koulí. Osudí s číslem k obsahuje k červených a $N-k$ bílých koulí, $k = 0, 1, \ldots, N$. Z náhodně zvoleného osudí n-krát vybereme kouli, přičemž vybranou kouli po tahu ihned vrátíme zpět. Stanovte pravděpodobnost, že jsou všechny vybrané koule červené.

$\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N+1} \left(\frac{i}{N}\right)^n\right]$

Příklad 4.90. V první sadě výrobků je 8 výrobků, z toho 2 vadné. Ve druhé sadě výrobků je 14 výrobků, z toho 1 vadný. Z první sady náhodně vybereme výrobek a přemístíme jej do druhé sady. Poté náhodně vybereme z druhé sady jeden výrobek. Jaká je pravděpodobnost, že je tento výrobek vadný?

$[1/12]$

Příklad 4.91. Na zkoušku z matematiky se dostavilo 25 studentů. Pravděpodobnost složení zkoušky je pro 12 studentů 0.75, pro 8 studentů 0.5 a pro 5 studentů 0.4. Stanovte pravděpodobnost, že náhodně zvolený student tuto zkoušku složí.

$[3/5]$

Příklad 4.92. Osudí obsahuje 6 bílých a 5 černých koulí. Vytáhneme z něj 4 koule a vložíme je do jiného prázdného osudí. Z tohoto druhého osudí vytáhneme jednu kouli a nevrátíme je zpět.

a) Jaká je pravděpodobnost, že je vytažená koule černá?

b) Z druhého osudí vytáheneme ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že je tato koule bílá, za předpokladu, že první tažená koule byla také bílá?

$[\text{a) } 5/11, \text{ b) } 31/74]$

Příklad 4.93. Jsou dána tři osudí, pravděpodobnost volby každého osudí je stejná. V prvním osudí je 1 bílá koule a 2 černé koule. Ve druhém osudí jsou 2 bílé koule a 1 černá koule. Třetí osudí obsahuje 2 bílé koule a 2 černé koule. Náhodně zvolíme jedno osudí a vytáhneme z něj jednu kouli a zjistíme, že je bílá. Vytaženou kouli nevrátíme zpět do osudí a vytáhneme ze stejného osudí ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že i tato druhá koule je bílá?

$[1/3]$

Příklad 4.94. Zákazník si náhodně vybírá jeden z 12 obrazů, mezi nimiž jsou 3 kopie. Výběru je přítomen odborník, který pozná originál s pravděpodobností 3/8.

a) Jestliže odborník považuje obraz za originál, jaká je pravděpodobnost, že skutečně jde o originál?

b) Odborník soudí, že zákazníkem zvolený obraz je kopie. Zákazník proto obraz odloží a volí náhodně jeden ze zbývajících obrazů. Jaká je nyní pravděpodobnost, že zákazník zvolí originál?

$[\text{a) } 9/13, \text{ b) } 41/44]$

Příklad 4.95. Hodíme n krát kostkou. Když padne liché číslo, vložíme do osudí bílou kouli, když padne sudé, vložíme do osudí černou kouli. Z takto naplněného osudí vytáhneme náhodně jednu kouli a nevrátím ji zpět. Ukázalo se, že je černá. Jaká je pravděpodobnost, že další vytažená koule bude bílá?

$$\left[\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}i(n-i)}{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(n-i)}\right]$$

4.4 Stochasticky nezávislé jevy

Příklad 4.96. Hodíme dvěmi hracími kostkami. Označme náhodné jevy A_1 na první kostce padne sudé číslo, A_2 na druhé kostce padne liché číslo, A_3 součet ok, které padly na 1. a 2. kostce, je liché číslo. Dokažte, že každé dva z jevů A_1, A_2, A_3 jsou nezávislé, ale jevy A_1, A_2, A_3 nejsou nezávislé.

Příklad 4.97. Nechť jevy A a B_1 jsou nezávislé a také jevy A a B_2 jsou nezávislé, přičemž B_1 a B_2 jsou neslučitelné. Dokažte, že jevy A a $B_1 \cup B_2$ jsou nezávislé.

Příklad 4.98. Nechť $\mathrm{P}(A) > 0$ a $\mathrm{P}(B|\overline{A}) = \mathrm{P}(B|A)$. Dokažte, že jevy A a B jsou nezávislé.

Příklad 4.99. Čtyři osoby vyplňovaly dotazník průzkumu veřejného mínění se třemi otázkami, na které bylo možno odpovědět pouze „ano"(1) nebo „ne"(0). Odpovědi dotazovaných byly 111, 001, 010, 100. Označme A_i jev: „náhodně zvolená osoba z těchto čtyř dotazovaných odpověděla kladně na i-tou otázku". Jsou jevy $A_1,\ A_2,\ A_3$ stochasticky nezávislé.

[ne]

Příklad 4.100. Tři myslivci současně vystřelili na medvěda. Medvěda zastřelili jednou kulí. Jaká je pravděpodobnost, že medvěda zastřelil a) první, b) druhý, c) třetí myslivec, když mají pravděpodobnost zásahu postupně $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$?

[a) 0.048, b) 0.128, c) 0.288]

Příklad 4.101. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu při první, druhém a třetím výstřelu jsou postupně 0.3, 0.5 a 0.6. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne cíl

a) právě jednou,

b) alespoň jednou,

b) právě dvakrát?

[a) 0.41, b) 0.86, c) 0.36]

Příklad 4.102. Jevy $A_1,\ A_2,\ A_3$ jsou stochasticky nezávislé, $\mathrm{P}(A_1) = 0.4$, $\mathrm{P}(A_2) = 0.4$, $\mathrm{P}(A_3) = 0.25$. Vypočtěte pravděpodobnost nastoupení alespoň jednoho z jevů $A_1,\ A_2,\ A_3$.

[0.73]

Příklad 4.103. Pravděpodobnost, že investice firmě přinese zisk je 0.3. Jaká je pravděpodobnost, že se z šesti (nezávislých) investic firmě vyplatí alespoň jedna?

[0.8824]

Příklad 4.104. Patnáctkrát nezávisle na sobě házíme čtyřmi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou čtyři líce?

[0.6202]

Příklad 4.105. Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět pratií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

[$\mathrm{P}(A) = 0.25, \mathrm{P}(B) = 0.21875$]

Příklad 4.106. Osmkrát nezávisle na sobě házíme třemi kostkami. Jaká je pravdě-podobnost, že právě dvakrát padnou tři šestky?

$[0.00058]$

5. Náhodné veličiny

5.5 Distribuční funkce

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Vlastnosti distribuční funkce:

- $F(x)$ je neklesající, tj.: $\forall\, x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}:\ F(x_1) \leq F(x_2)$
- $F(x)$ je zprava spojitá, tj.: $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$
- $F(x)$ je normovaná, tj.: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $\forall\, a,\ b \in \mathcal{R}:\ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$

Příklad 5.1. Rozhodněte, zda funkce $F(x)$ je distribuční funkcí.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

[ano]

Příklad 5.2. Určete konstanty k_1 a k_2 tak, aby funkce $F(x)$ byla distribuční funkcí náhodné veličiny X. Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina X se bude realizovat v intervalu $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} >$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ k_1 + k_2 \arcsin \frac{x}{a} & -a \leq x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

$\left[k_1 = \frac{1}{2},\ k_2 = \frac{1}{pi};\ \frac{1}{3}\right]$

Příklad 5.3. Určete konstanty a a b tak, aby funkce $F(x) = a + b \arctan x$ byla distribuční funkcí náhodné veličiny X.

$\left[a = \frac{1}{2};\ b = \frac{1}{\pi}\right]$

5.6 Diskrétní náhodná veličina

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a její vlastnosti

- $F(x) = \sum\limits_{t \leq x} p(t)$
- $p(x) \geq 0$
- $\sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} p(x) = 1$
- $p(x_0) = P(X = x_0)$

- $p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2)$
- $p_1(x_1) = \sum\limits_{x_2=-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2), \quad p_2(x_2) = \sum\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)$

- $p_{12}(x_1, x_2) = \sum\limits_{x_3=-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, x_3)$
- $p_1(x_1) = \sum\limits_{x_2=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{x_3=-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, x_3)$

Příklad 5.4. Hodíme čtyřikrát mincí. Náhodná veličina X udává počet padlých líců v těchto čtyřech hodech. Nalezněte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X a také její distribuční funkci.

$\left[p(0) = \frac{1}{16},\ p(1) = \frac{1}{4},\ p(2) = \frac{3}{8},\ p(3) = \frac{1}{4},\ p(4) = \frac{1}{16}\right]$

Příklad 5.5. Hodíme dvěma kostkami. Náhodná veličina X udává počet ok na první kostce, náhodná veličina Y udává počet ok na druhé kostce. Označme $Z = X + Y$. Nalezněte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Z a také její distribuční funkci.

$\left[p(2;12) = \frac{1}{36},\ p(3;11) = \frac{2}{36},\ p(4;10) = \frac{3}{36},\ p(5;9) = \frac{4}{36},\ p(6;8) = \frac{5}{36},\ p(7) = \frac{6}{36}\right]$

Příklad 5.6. Postupně je zkoušeno pět přístrojů. Další přístroj se zkouší, pokud je předchozí přístroj spolehlivý. Každý z přístrojů vydrží zkoušku s pravděpodobností 0.9. Náhodná veličina X udává počet zkoušených přístrojů. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

$[p(0) = 0.1,\ p(1) = 0.09,\ p(2) = 0.081, p(3) = 0.0729,\ p(4) = 0.6561]$

Příklad 5.7. Střelec střílí do terče až do prvního zásahu. Má v zásobě čtyři náboje. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu 0.6. Náhodná veličina X udává počet nespotřebovaných nábojů. Stanovte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

$[p(0) = 0.064,\ p(1) = 0.096,\ p(2) = 0.24,\ p(3) = 0.6]$

Příklad 5.8. Rodiče plánují mít tři děti. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození chlapce i dívky je stejná. Náhodná veličina X udává počet dětí stejného pohlaví, které se narodily za sebou (např pro HDD je $X = 2$). Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

$[p(1) = 0.25,\ p(2) = 0.5,\ p(3) = 0.25]$

Příklad 5.9. Auto musí projet čtyři křižovatky řízené nezávislými semafory. Na každém semaforu svítí zelená nebo červená s pravděpodobností 0.5. Náhodná veličina X udává počet projetých křižovatek do první křižovatky, kdy auto musí zastavit. Nalezněte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

$[p(0) = 0.5,\ p(1) = 0.25,\ p(2) = 0.125,\ p(3) = 0.0625,\ p(4) = 0.0625]$

Příklad 5.10. Může být níže uvedená funkce $p(x)$ při vhodné konstantě c pravděpodobnostní funkcí?

$$p(x) = \begin{cases} c(1-\vartheta)^x & x = 0, 1, 2, \dots \quad \vartheta \in (0, 1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$[c = \vartheta]$

Příklad 5.11. Je dána funkce $p(x)$. Určete konstantu k tak, aby $p(x)$ byla pravděpodobnostní funkcí diskrétní náhodné veličiny X. Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty větší než 4.

$$p(x) = \begin{cases} k\, 0.7^x & \text{pro } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\left[k = \frac{3}{7};\ 0.24\right]$

Příklad 5.12. Nechť je dán systém složený ze dvou bloků. Pravděpodobnost, že i-tý blok správně funguje je $\vartheta_i,\ i = 1, 2;\ 0 < \vartheta_i < 1$. Pravděpodobnost, že správně fungují oba bloky je $\vartheta_{12},\ 0 < \vartheta_{12} < 1$. Náhodná veličina X_i nabývá hodnoty 1, když i-tý blok funguje správně a $X_i = 0$ když nefunguje. Vyjádřete pravděpodobnostní funkci $p(x_1, x_2)$ a obě marginální pravděpodobnostní funkce $p(x_1)$, $p(x_2)$.

Příklad 5.13. Určete konstantu k tak, aby funkce $p(x_1, x_2, x_3)$ byla pravděpodobnostní funkcí. $p(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} kx_1x_2x_3^2 & x_1 \in \{0,1\},\ x_2 \in \{0,1\},\ x_3 \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$\left[\frac{1}{14}\right]$

5.7 Spojitá náhodná veličina

Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ a její vlastnosti

- $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- $f(x) \geq 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$
- $P(x_0 < X < x_0 + h) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$
- $P(X = x_0) = 0$
- $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$ ve všech bodech spojitosti $f(x)$

- $f_{12}(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\ dx_3$
- $f_1(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\ dx_2dx_3$

Příklad 5.14. Spojitá náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti $f(x)$. Určete konstantu a. Vypočtěte pravděpodobnost, že se náhodná veličina X bude realizovat v intervalu $(1/3; 2/3)$.

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$[2;\ 1/3]$

Příklad 5.15. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$. Určete hustotu $f(x)$. Vypočtěte pravděpodobnost, že se náhodná veličina X bude realizovat v intervalu $(-2;2)$ pomocí hustoty i pomocí distribuční funkce.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-5\\ \frac{x+5}{7} & -5\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$\left[f(x)=\frac{1}{7}\ \ x\in<-5;2);\ \frac{4}{7}\right]$

Příklad 5.16. Je dána funkce $F(x)$. Určete konstanty a a b tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí spojité náhodné veličiny X. Určete také hustotu náhodné veličiny X.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ a+b\sin x & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$\left[a=0;\ b=1;\ f(x)=\cos x\quad 0\le x<\frac{\pi}{2}\right]$

Příklad 5.17. Na automatické lince se plní krabice mlékem, každá krabice má obsahovat přesně 1000 ml mléka, avšak působením náhodných vlivů kolísá množství mléka v intervalu $(980$ ml, 1020 ml$)$. Každé množství mléka v tomto intervalu považujeme za stejně možné. Náhodná veličina X udává množství mléka v náhodně vybrané krabici. Najděte hustotu $f(x)$, distribuční funkci $F(x)$, nakreslete grafy těchto funkcí a vypočtěte pravděpodobnost, že $X>990$ ml.

$\left[f(x)=\frac{1}{40},\ x\in(980,1020);\ F(x)=\frac{1}{40}(x-980),\ x\in(980,1020);\ 0.75\right]$

Příklad 5.18. Je dána funkce

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}kx_1x_2x_3^2 & 0<x_1<1, 0<x_2<1, 0<x_3<3\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

a) Určete konstantu k tak, aby funkce $f(x_1,x_2,x_3)$ byla hustotou pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru (X_1,X_2,X_3).

b) Najděte všechny marginální hustoty.

c) Vypočtěte pravděpodobnost $P(0<x_1<\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{3}<x_2<\frac{2}{3}\wedge 1<x_3<2)$.

[a) $\frac{4}{9}$, b) $f(x_1,x_2)=4x_1x_2,\ f(x_i,x_3)=\frac{2}{9}x_ix_3^2, i=1,2;$]
[$f(x_i)=2x_i, i=1,2;\ f(x_3)=\frac{x_3^2}{9}$, c) $\frac{7}{324}$]

Příklad 5.19. Vypočtěte pravděpodobnost $P((X_1,X_2)'\in G)$, kde
$G=\{(x_1,x_2)'\in\mathcal{R}^2,\ 0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$, je-li známo, že
$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\quad 0<x_1<1, 0<x_2<1, 0<x_3<3$

$\left[\frac{1}{16}\right]$

Příklad 5.20. Nechť $(X_1, X_2)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení soustředěné na

a) $G = \{(x_1, x_2)' \in \mathcal{R}^2,\ 0 \leq x_1 < 1,\ 0 \leq x_2 < 1\}$

b) $G = \{(x_1, x_2)' \in \mathcal{R}^2,\ 0 \leq x_1 < 1,\ 0 \leq x_2 < 1 - x_1\}$

V obou případech určete sdružené a marginální hustoty.

[a) $f(x_1, x_2) = 1, f_1(x_1) = 1, f_2(x_2) = 1$]

[b) $f(x_1, x_2) = 2, f_1(x_1) = 2(1 - x_1), f_2(x_2) = 2(1 - x_2)$]

6. Diskrétní náhodné veličiny

Příklad 6.1. Dvakrát házíme mincí. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává počet padlých líců. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

$$\left[\begin{array}{c} \Omega = \{[\mathrm{R},\mathrm{R}],[\mathrm{R},\mathrm{L}],[\mathrm{L},\mathrm{R}],[\mathrm{L},\mathrm{L}]\}, \\ p(x) = \begin{cases} 1/4, & x = 0,2, \\ 1/2, & x = 1, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/4, & x \in < 0,1), \\ 3/4, & x \in < 1,2), \\ 1 & x \geq 2, \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 6.2. Dvakrát házíme hrací kostkou. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává součet hodnot, které padnou v 1. a 2. hodu. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

$$\left[\begin{array}{c} \Omega = \{[1,1],\dots,[1,6],[2,6],\dots,[6,6]\}, \\ p(x) = \begin{cases} \frac{6-|x-7|}{36}, & x = 2,\dots,12, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=2}^{\min\{x,12\}} \frac{6-|i-7|}{36}, & x \geq 2, \\ 0, & x < 2. \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 6.3. Házíme mincí, dokud nepadne líc. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává počet provedených hodů. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

$$\left[\begin{array}{c} \Omega = \{[\mathrm{L}],[\mathrm{R},\mathrm{L}],[\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{L}],\dots\}, \\ p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x}, & x = 1,2,\dots, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{x} \frac{1}{2^i}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 6.4. Střílíme na cíl do prvního zásahu. Zásahy při různých výstřelech jsou nezávislé jevy, pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je p. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává celkový počet výstřelů. Určete rozdělení náhodné veličiny X, její pravděpodobnostní a distribuční funkci. Nakreslete jejich grafy.

$$\left[\begin{array}{c}\Omega = \{[\mathrm{Z}], [\mathrm{M}, \mathrm{Z}], [\mathrm{M}, \mathrm{M}, \mathrm{Z}], \dots\}, \\ p(x) = \begin{cases}(1-p)^{x-1}p, & x = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak},\end{cases}, F(x) = \begin{cases}0, & x < 1, \\ 1-(1-p)^{[x]}, & x \geq 1,\end{cases}\end{array}\right]$$

Příklad 6.5. Střelec n-krát vystřelí na cíl. Předpokládejme, že zásahy při jednotlivých výstřelech jsou nezávislé jevy a označme p pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu. Nechť náhodná veličina X udává počet zásahů při n výstřelech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete jejich grafy.

$$\left[\begin{array}{l}p(x) = \begin{cases}\binom{n}{x}(1-p)^x p^{n-x}, & x = 0, \dots, n, \\ 0 & \text{jinak},\end{cases}, \\ F(x) = \begin{cases}0, & x < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{[x]} \binom{n}{i}(1-p)^i p^{n-i}, & 0 \leq x < n, \\ 1, & x \geq n.\end{cases}\end{array}\right]$$

Příklad 6.6. Studentovi je předložen test, který obsahuje 10 otázek a ke každé z nich 4 možné odpovědi, z nichž jediná je správná; tu má student podtrhnout.

a) Stanovte rozdělení náhodné veličiny X, která udává počet správně zodpovězených otázek, jestliže látku student nezná a volí odpovědí náhodně.

b) Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví správně alespoň 5 otázek?

$$\left[\text{a) } p(x) = \begin{cases}\binom{n}{x}0.25^x 0.75^{n-x}, & x = 0, \dots, n, \\ 0 & \text{jinak},\end{cases}, \text{ b) } 0.0781\right]$$

Příklad 6.7. Dva hráči košíkové střídavě házejí na koš tak dlouho, dokud jeden z nich nezasáhne. První hráč zasáhne koš s pravděpodobností p_1, druhá s pravděpodobností p_2. Určete rozdělení pravděpodobností počtu hod;, které provede každý z nich.

$$\left[\begin{array}{l}p_{X_1}(x) = \begin{cases}(1-p_1)^{x-1}(1-p_2)^{x-1}p_1 + (1-p_1)^x(1-p_2)^{x-1}p_2, & x = 1, \dots, \\ 0 & \text{jinak},\end{cases} \\ p_{X_2}(x) = \begin{cases}p_1, & x = 0, \\ (1-p_1)^x(1-p_2)^x p_1 + (1-p_1)^x(1-p_2)^{x-1}p_2, & x = 1, \dots, \\ 0 & \text{jinak}.\end{cases}\end{array}\right]$$

Příklad 6.8. Která z dále uvedených funkcí je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny

a) $p^x q^2$, $q = 1 - p$, $0 < p \leq 1$, $x = 1, 2, \dots$,

b) $p^{x-n}q$, $q = 1 - p$, $0 < p \leq 1$, $n > 0$, $x = n, n+1, \dots$,

c) $\frac{1}{x(x+1)}, x \in \mathrm{R}$,

d) $\int\limits_{x}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$, $x = 0, 1, \ldots$, kde $\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$, f je nezáporná funkce,

e) $\frac{2^x}{x!}\, e^{-2}$, $x = 0, 1, \ldots$?

$[\mathrm{b})\ ,\ \mathrm{d})\ ,\ \mathrm{e})\,]$

Příklad 6.9. Je dána funkce

$$p(x) = \begin{cases} c0.4^x & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a) Stanovte konstantu $c \in \mathbf{R}$ tak, aby $p(x)$ byla pravděpodobnostní funkcí diskrétní náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte pravděpodobnost $\mathrm{P}(X < 4)$.

c) Vypočtěte pravděpodobnost $\mathrm{P}(X \geq 5)$.

d) Vypočtěte pravděpodobnost $\mathrm{P}(-1 < X \leq 2)$.

$[\mathrm{a})\ 3/2,\ \mathrm{b})\ 0,936,\ \mathrm{c})\ 0,0256,\ \mathrm{d})\ 0.84.]$

Příklad 6.10. Diskrétní náhodná veličina X má distribuční funkci tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2, \\ 0.2 & x \in < 2, 3), \\ 0.4 & x \in < 3, 5), \\ 0.7 & x \in < 5, 6), \\ 1 & x \geq 6. \end{cases}$$

a) Stanovte pravděpodobnostní funkci $p(x)$ náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte $\mathrm{P}(2,3 < X \leq 5,5)$ jak z distribuční funkce $F(x)$, tak z pravděpodobnostní funkce $p(x)$.

$$\left[\mathrm{a})\ p(x) = \begin{cases} 0.2 & x = 2, 3 \\ 0.3 & x = 5, 6 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases},\ \mathrm{b})\ 0.5\right]$$

Příklad 6.11. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci a) náhodné veličiny $Y = |X|$, b) náhodné veličiny $Y = X^2$. Nakreslete grafy těchto funkcí.

$$\left[\text{a) } p(y) = \begin{cases} 1/3 & y = 0, \\ 2/3 & y = 1, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1/3, & y \in <0, 1), \\ 1, & y \geq 1, \end{cases} \text{ b) stejné jak v a)}\right]$$

Příklad 6.12. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = 2^X$. Nakreslete jejich grafy.

$$\left[p(y) = \begin{cases} 0,2 & y = 1/2, \\ 0,1 & y = 1, \\ 0,3 & y = 2, \\ 0,4 & y = 4, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \quad F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1/2, \\ 0,2, & y \in <1/2, 1), \\ 0,3, & y \in <1, 2), \\ 0,6, & y \in <2, 4), \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}\right]$$

Příklad 6.13. Nechť X je náhodná veličina s rozdělením

x	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \sin(X\pi)$. Nakreslete jejich grafy.

$$\left[p(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & y \geq 0. \end{cases}\right]$$

Příklad 6.14. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci $p(x) = x/16$ pro $x = 1, 3, 5, 7,\ p(x) = 0$ jinak. Vypočtěte

a) $\mathrm{P}(X = 1 \vee X = 3)$,

b) $\mathrm{P}(5/2 < X < 11/2)$,

c) $\mathrm{P}(5 \leq X \leq 7.3)$,

$[\text{a) } 1/4, \text{ b) } 1/2, \text{ c) } 3/4]$

Příklad 6.15. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
p	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,16	0,081	0,016

Vypočtěte a) $\mathrm{P}(X \leq -0,05)$, b) $\mathrm{P}(X > 1)$, c) $\mathrm{P}\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right)$, d) $\mathrm{P}(|X| > 1,5)$.

$[\mathrm{a})\ 0,091,\ \mathrm{b})\ 0,257,\ \mathrm{c})\ 0,738,\ \mathrm{d})\ 0,097]$

Příklad 6.16. Házíme dvěma hracími kostkami. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X udává počet šestek, které padly na první kostce, náhodná veličina Y udává počet šestek, které padly na druhé kostce. Určete sdružené rozdělení X a Y. Dokažte, že jsou veličiny X a Y nezávislé.

$$\left[\begin{array}{r} \Omega = \{[1,1], \ldots, [1,6], [2,6], \ldots, [6,6]\}, \\ p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{25}{36}, & [x,y] = [0,0], \\ \frac{5}{36}, & [x,y] \in \{[0,1],[1,0]\} \\ \frac{1}{36}, & [x,y] = [1,1], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}, & x = 0, \\ \frac{1}{6}, & x = 1, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 6.17. Házíme dvěma hracími kostkami. Popište prostor elementárních jevů Ω. Nechť náhodná veličina X je počet ok padlých na první kostce, náhodná veličina Y udává počet ok padlých na druhé kostce. Určete sdružené rozdělení X a Y. Dokažte, že jsou veličiny X a Y nezávislé.

$$\left[\begin{array}{r} \Omega = \{[1,1], \ldots, [1,6], [2,6], \ldots, [6,6]\} \\ p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & [x,y] \in \Omega \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, \ldots, 6 \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 6.18. Házíme dvěma hracími kostkami. Nechť náhodná veličina X je počet ok, které padly na první kostce, náhodná veličina Y udává maximum z počtu ok na obou kostkách. Určete sdružené rozdělení X a Y.

[Sdruženou pravděpodobnostní funkci lze zadat maticí 6×6 s hlavní diagonálou $1/36, 2/36, \ldots, 6/36$. Pod diagonálou jsou všechny členy nulové, nad ní $1/36$.]

Příklad 6.19. V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 nekvalitní. Mezi kvalitními je 5 první jakosti a 3 druhé jakosti. Ze zásilky náhodně vybereme 2 výrobky, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Počet kvalitních kusů se výběru je náhodná veličina X a počet vybraných výrobků první jakosti je náhodná veličina Y. Určete sdružené rozdělení náhodných veličin X a Y a zjistěte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

$$\left[\begin{array}{l} p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & [x,y] = [0,0], \\ \frac{6}{45}, & [x,y] = [1,0], \\ \frac{3}{45}, & [x,y] = [2,0], \\ \frac{10}{45}, & [x,y] \in \{[1,1],[2,2]\}, \\ \frac{15}{45}, & [x,y] = [2,1], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \\ p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & x = 0, \\ \frac{16}{45}, & x = 1, \\ \frac{28}{45}, & x = 2, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, p_Y(y) = \begin{cases} \frac{10}{45}, & y = 0, \\ \frac{16}{45}, & y = 1, \\ \frac{28}{45}, & y = 2, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \\ \text{Náhodné veličiny } X \text{ a } Y \text{ nejsou nezávislé.} \end{array}\right]$$

Příklad 6.20. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny X a $Y = 2^X$ nezávislé.

$$\left[\begin{array}{l} p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0,2 & [x,y] = [-1,1/2], \\ 0,1 & [x,y] = [0,1], \\ 0,3 & [x,y] = [1,2], \\ 0,4 & [x,y] = 2,4, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, p(y) = \begin{cases} 0,2 & y = 1/2, \\ 0,1 & y = 1, \\ 0,3 & y = 2, \\ 0,4 & y = 4, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \\ \text{Náhodné veličiny } X \text{ a } Y \text{ nejsou nezávislé.} \end{array}\right]$$

Příklad 6.21. Nechť X nabývá hodnot $\pm 1, \pm 2$, každou s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, a $Y = X^2$. a) Určete sdružené rozdělení X a Y. b) Zjistěte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & [x,y] \in \{[1,1],[-1,1],[2,4],[-2,4]\} \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, \\ \text{b) } p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y = 1,4 \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, \text{tedy náhodné veličiny } X \text{ a } Y \text{ nejsou nezávislé.} \end{array}\right]$$

Příklad 6.22. Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé a mají stejné geometrické rozdělení ($p(x) = q^x p, x = 0, 1, \ldots, p > 0, q = 1 - p$). Nechť $Y = \max(X_1, X_2)$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y a sdružené rozdělení veličin Y a X_1.

$$\left[\begin{array}{l} p_Y(y) = \begin{cases} 2q^y p - q^{2y}p - q^{2y+1}p, & y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}, \\ p_{(Y,X_1)}(y,x) = \begin{cases} q^{x+y}p^2, & y > x, x, y = 0, 1, \dots, \\ (1 - q^{y+1})q^y p, & y = x = 0, 1 \dots, \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 6.23. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a mají Poissonovo rozdělení $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1)$ a $X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2)$. Dokažte, že náhodná veličina $Y = X_1 + X_2$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

7. Číselné charakteristiky náhodných veličin

Střední hodnota

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \qquad \text{respektive} \quad E(X) = \int_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E(Y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p(x) \qquad \text{respektive} \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

pro $Y = g(X)$ kde g je borelovská funkce.

Nechť a,b jsou reálná čísla, $X, X_1, \ldots, X_n$, náhodné veličiny. Pak:

- $E(a) = a; \quad E(a + bX) = a + bE(X); \quad E(X - E(X)) = 0$
- $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i); \quad E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$ jsou-li X_i stoch. nez.

Rozptyl

$$D(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Nechť a,b jsou reálná čísla, $X, X_1, \ldots, X_n$, náhodné veličiny. Pak:

- $D(a) = 0; \quad D(a + bX) = b^2 D(X)$
- $D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+1}^{n} C(X_i, X_j)$
- směrodatná odchylka $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$

Šikmost

$$A_3(X) = \frac{E([X - E(X)]^3)}{\sqrt{D(X)}^3}$$

Špičatost

$$A_4(X) = \frac{E([X - E(X)]^4)}{\sqrt{D(X)}^4} - 3$$

Kovariance

$$C(X_1, X_2) = E([X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

Nechť a_1, a_2, b_1, b_2 jsou reálná čísla, $X, X_1, \ldots, X_n$, $Y, Y_1, \ldots, Y_m$ náhodné veličiny. Pak

- $C(a_1, X_2) = C(X_1, a_2) = C(a_1, a_2) = 0$
- $C(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = b_1b_2C(X_1, X_2)$
- $C(X, X) = D(X)$
- $C(X_1, X_2) = C(X_2, X_1)$
- $C(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} C(X_i, Y_j)$

Korelace

$$R(X_1, X_2) = E\left(\frac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)}} \cdot \frac{X_2 - E(X_2)}{\sqrt{D(X_2)}}\right) = \frac{C(X_1, X_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}$$

Nechť a_1, a_2, b_1, b_2 jsou reálná čísla, X, X_1, X_2, náhodné veličiny. Pak

- $R(a_1, X_2) = R(X_1, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$
- $R(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = \text{sgn}(b_1b_2)R(X_1, X_2)$
- $R(X, X) = 1$
- $R(X_1, X_2) = R(X_2, X_1)$

Regresní přímka

Y na X (jak Y závisí na X)

$$Y = E(Y) + \rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - E(X))$$

X na Y (jak X závisí na Y)

$$Y = E(Y) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - E(X))$$

α-kvantil $K_\alpha(X)$ α-kvantil $K_\alpha(X)$náhodné veličiny X je minimální číslo x_0 takové, že

$$F(x_0) \geq \alpha$$

Ve spojitém případě:

$$\alpha = F(K_\alpha(X)) = \int_{-\infty}^{K_\alpha(X)} f(x)dx$$

- $u_\alpha = u_{1-\alpha}$
- $t_\alpha = t_{1-\alpha}$
- $F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$

Příklad 7.1. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny, která má rozdělení

a)	alternativní A(θ),	b)	binomické Bi(n, θ),
c)	Poissonovo Po(λ),	d)	geometrické G(θ),
e)	záporně binomické Zb(n, θ),	f)	rovnoměrné R(α, β),
g)	exponenciální Ex(λ),	h)	normální N(μ, σ^2),
i)	Pearsonovo $\chi^2(\nu)$,	j)	Studentovo t(ν),
k)	Fisher-Snedecorovo F(ν_1, ν_2).		

[a) $\vartheta;\ \vartheta(1-\vartheta)$, b) $n\vartheta;\ n\vartheta(1-\vartheta)$, c) $\lambda;\ \lambda$, d) $(1-\theta)/\theta;\ (1-\theta)/\theta^2$ e) $n(1-\theta)/\theta;\ n(1-\theta)/\theta^2$ f) $\frac{a+b}{2};\ \frac{(b-a)^2}{12}$ g) $\frac{1}{\lambda};\ \frac{1}{\lambda^2}$ h) $\mu;\ \sigma^2$ i) $\nu;\ 2\nu$ j) 0 pro $\nu \geq 2$, pro $\nu = 1$ neexistuje; $\nu/(\nu-2)$pro $\nu \geq 3$, pro $\nu = 1, 2$ neexistuje, k) $\nu_2/(\nu_2 - 2)$ pro $\nu_2 \geq 3$, pro $\nu_2 = 1, 2$ neexistuje; $2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)/[\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)]$ pro $\nu_2 \geq 5$, pro $\nu_2 = 1, 2, 3, 4$ neexistuje;]

Příklad 7.2. Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem 2.

a) Nakreslete pravděpodobnostní funkci pro $x = 0, 1, \dots, 9$.

b) Určete střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X a zakreslete interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ do grafu.

c) Jaká je pravděpodobnost, že X leží v intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$?

$$\left[\text{b) } E(X) = 2, \sqrt{D(X)} \doteq 1,414.\right]$$

Příklad 7.3. Náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry $n = 20$ a $p = 0,7$.

a) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(X = 14)$.

b) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(X \leq 10)$.

c) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(X > 10)$.

d) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(8 \leq X \leq 17)$.

e) Vypočtěte $\mathrm{P}\,(8 < X < 17)$.

f) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

g) Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$?

Příklad 7.4. Náhodná veličina X má rozdělení

x	10	20	30	40	50	60
p	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

a) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ.

b) Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$.

c) Označte v grafu hodnotu μ a interval $\mu \pm 2\sigma$. Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $\mu \pm 2\sigma$?

$$[\text{a) } 31;\ 169;\ 13,\ \text{b) } 0.95]$$

Příklad 7.5. Náhodná veličina X má rozdělení

x	1	2	3	4	5
p	0,05	0,3	0,35	0,2	0,1

a) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ.

b) Nakreslete graf $p(x)$.

c) Označte v grafu hodnotu μ a interval $\mu \pm \sigma$. Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $\mu \pm \sigma$?

d) Označte v grafu hodnotu μ a interval $\mu \pm 3\sigma$. Jaká je pravděpodobnost, že X padne do tohoto intervalu?

Příklad 7.6. Náhodná veličina X má rozdělení

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,02	0,07	0,1	0,15	0,3	0,18	0,1	0,06	0,02

a) Vypočtěte střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a směrodatnou odchylku σ.

b) Nakreslete graf $p(x)$. Označte v grafu hodnotu μ, $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.

c) Jaká je pravděpodobnost, že X padne do intervalu $\mu \pm 2\sigma$?

Příklad 7.7. Předpokládejme, že v určité populaci má náhodná veličina X udávající počet telefonů v jedné domácnosti pravděpodobnostní funkci p zadanou následující tabulkou.

x	1	2	3	4	5
p	0,35	0,45	0,15	0,04	0,01

Určete střední hodnotu a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

$$\left[\mathrm{E}(X) = 1,91,\ \sqrt{\mathrm{D}(X)} = 0,86.\right]$$

Příklad 7.8. Hodnoty pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X a Y jsou zapsány v následující tabulce.

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	0,6	0,3	0,1	0	0
$p_Y(x)$	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Vypočtěte $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{D}X$ a $\mathrm{D}Y$

$$[\mathrm{E}X = 0,5, \mathrm{E}Y = 2]$$

Příklad 7.9. Nechť X a Y mají simultánní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí zavedenou v následující tabulce.

x \ y	1	2	3	
1	0	0	1/2	1/2
2	0	1/3	0	1/3
3	1/6	0	0	1/6
	1/6	1/3	1/2	1

Určete kovarianci $\mathrm{C}(X,Y)$ a korelační koeficient ρ. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

$[\mathrm{C}(X,Y) = -5/9, \rho = -1.]$

Příklad 7.10. Nechť X a Y mají simultánní rozdělení definované následující tabulkou hodnot pravděpodobnostní funkce.

x \ y	0	1	2
1	0,2	0,1	0,3
2	0	0,2	0,2

Vypočtěte kovarianci $\mathrm{C}(X,Y)$ a rozptyl $\mathrm{D}(X+Y)$. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé.

$[\mathrm{C}(X,Y) = 0,08, \mathrm{D}(X+Y) = 1,01.]$

Příklad 7.11. Simultánní pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X a Y je zadána následující tabulkou.

(x,y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
$p(x,y)$	2/15	4/15	3/15	1/15	1/15	4/15

Jinak je funkce $p(x,y) = 0$. Nalezněte korelační koeficient ρ. Ověřte, zda X a Y jsou nezávislé.

$[7/\sqrt{804}.]$

Příklad 7.12. Nechť pro náhodné veličiny Y a Z platí $P(Y=0,Z=0) = 0,1; P(Y=0,Z=1) = 0,2; P(Y=1,Z=0) = 0,3; P(Y=1,Z=1) = 0,4$. Vypočtěte korelační koeficient $\rho_{Y,Z}$.

$[\rho_{Y,Z} = -\frac{5}{56}.]$

Příklad 7.13. Nechť náhodné veličiny X a Y mají simultánní pravděpodobnostní funkci

a) $p(x,y) = \frac{1}{3},\ (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$, jinak je $p(x,y) = 0$.

b) $p(x,y)=\frac{1}{3},\ (x,y)\in\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$, jinak je $p(x,y)=0$.

c) $p(x,y)=\frac{1}{3},\ (x,y)\in\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$, jinak je $p(x,y)=0$.

Vypočtěte korelační koeficient X a Y. Dále ověřte, zda X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

$[\text{a) } 1,\ \text{b) } -1,\ \text{c) } 0.]$

Příklad 7.14. Nechť X a Y mají sdružené rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{15}(x+y+1) & x=0,1,2,\ y=0,1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

Určete kovarianci $\mathrm{C}(X,Y)$ a korelační koeficient $\mathrm{R}(X,Y)$.

$[\mathrm{C}(X,Y)=-6/225,\ \mathrm{R}(X,Y)\doteq -0.07]$

Příklad 7.15. Nechť X a Y mají simultánní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{x+2y}{18} & (x,y)'\in\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

a) Určete kovarianci a korelační koeficient.

b) Nalezněte obě regresní přímky.

c) Ověřte, zda X a Y jsou stochasticky nezávislé.

[a) $\mathrm{C}(X,Y)=-\frac{1}{162},\ \mathrm{R}(X,Y)=-0.025$, b) $Y=-\frac{X}{40}+\frac{33}{20},\ Y=-\frac{77X}{2}+\frac{123}{2}$,
c) nejsou]

Příklad 7.16. Nalezněte šikmost a špičatost náhodné veličiny X, která má rozdělení dané následující tabulkou.

x	0	1	2
$p(x)$	0.25	0.5	0.25

[0]

Příklad 7.17. Nalezněte kvantily $K_{0.2}, K_{0.6}, K_{0.8}$ diskrétní náhodné veličiny X, která má následující rozdělení:

x	1	2	3
$p(x)$	0.25	0.5	0.25

$[1,\ 2,\ 3]$

Příklad 7.18. Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodního domu, je náhodná veličina X. Statisticky bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, 4 s pravděpodobnostmi 0,25; 0,55; 0,11; 0,07; 0,02. Najděte momentové charakteristiky polohy, variability, šikmosti a špičatosti dané veličiny.

$[E(X) = 1,06, D(X) = 0,8164, A3 = 1,1, A4 = 1,33.]$

Příklad 7.19. Ve velkém městě byl proveden průzkum veřejného mínění u 20-ti voličů. Účelem je zjistit pozorování náhodné veličiny X, která je rovna počtu hlasů ve prospěch určitého kandidáta na starostu. Předpokládejme, že ve skutečnosti nám neznámých 60% voličů ve městě upřednostňuje tohoto kandidáta.

a) Vypočtěte střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

b) Určete pravděpodobnost $\mathrm{P}(X \leq 10)$.

c) Určete pravděpodobnost $\mathrm{P}(X > 12)$.

d) Určete pravděpodobnost $\mathrm{P}(X = 11)$.

e) Nakreslete pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X a označte v něm hodnoty μ, $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.

[a) Náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry $n = 20$ a $p = 0,6$. Tedy $\mathrm{E}(X) = np = 12$, $\sqrt{\mathrm{D}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = 2,2$. b) $\mathrm{P}(X \leq 10) = 0,245$. c) $\mathrm{P}(X > 12) = 0,416$. d) $\mathrm{P}(X = 11) = 0,159$.]

Příklad 7.20. Nechť náhodná veličina X udává počet ok při hodu kostkou. Nalezněte její rozptyl.

$\left[\frac{35}{12}\right]$

Příklad 7.21. Jedenkrát hodíme osmi kostkami. Vypočtěte střední hodnotu a směrodatnou odchylku součtu ok padlých na všech osmi kostkách.

Příklad 7.22. Městská rada se skládá ze čtyř liberálů a čtyř konzervativců. Tři členové rady jsou náhodně vybráni do komise. Nechť X udává počet vybraných liberálů. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X a spočtěte střední hodnotu.

$$\left[p(x) = \begin{cases} \frac{4}{56}, & x = 0,3 \\ \frac{24}{56}, & x = 1,2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}, \mathrm{E}(X) = 1,5.\right]$$

Příklad 7.23. Náhodně bez opakování zvolíme tři čísla z $1, 2, \ldots, 9$. Nechť X udává největší z těchto tří čísel. Určete střední hodnotu $\mathrm{E}(X)$.

$[\mathrm{E}(X) = 7,5.]$

Příklad 7.24. Osoba má čtyři podobné klíče, z nichž pouze jedním může otevřít dveře své kanceláře. Náhodně, bez opakování zkouší tyto klíče. Nechť náhodná veličina X udává počet klíčů, které osoba musela vyzkoušet, než odemkla svou kancelář (včetně klíče, kterým kancelář odemkla).

a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte střední hodnou a směrodatnou odchylku X.

c) Stanovte pravděpodobnostní funkci X za předpokladu, že osoba vybírá klíče náhodně, s opakováním.

Příklad 7.25. V osudí jsou 3 bílé a 6 černých koulí. Naráz náhodně vybereme čtyři koule. Nechť X udává počet takto vytažených bílých koulí. Vypočtěte střední hodnou a rozptyl náhodné veličiny X.

Příklad 7.26. V sérii výrobků, která je připravena k expedici, je 8% výrobků s vadou povrchové úpravy. Dlouhodobým statistickým pozorováním bylo zjištěno. že pravděpodobnost reklamace výrobku s uvedenou vadou je 0,8. Bylo uvažováno o dvou variantáchprodeje těchto výrobků: buď zákazníkovi v případě reklamace bude poskytnuta 50% sleva, nebo původní cena výrobku bude snížena o 5% (bez možnosti reklamace). Předpokládaná cena výrobku je c. Která z obou variant prodeje je pro spotřebitele výhoddnější?

[a) $0,968c$; b) $0,95c$ Tedy pro spotřebitele je výhodnější druhá varianta.]

Příklad 7.27. Podle úmrtnostních tabulek (1960 až 1961) je pravděpodobnost úmrtí 25 letého muže během roku rovna 0,001674. Pojišťovna nabízí mužům tohoto věku, že při ročním pojistném 100Kč vyplatí pozůstalým v případě úmrtí pojištěnce 30 000Kč. Jaký zisk může pojišťovna očekávat, jestliže takovouto pojistku uzavře 1000 mužů uvedeného věku?

[49780.]

SPOJITÉ VELIČINY

Příklad 7.28. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení s parametry $a = 20$, $b = 45$.

a) Určete hustotu $f(x)$.

b) Vypočtěte střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

c) Nakreslete graf hustoty $f(x)$, vyznačte hodnotu μ spolu s intervalem $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. Všimněte si, že náhodná veličina X leží v intervalu $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ s pravděpodobností 1.

Vypočtěte:	d)	$\mathrm{P}(20 \leq X \leq 35)$,	e)	$\mathrm{P}(20 < X < 35)$,
	f)	$\mathrm{P}(X \geq 35)$,	g)	$\mathrm{P}(X \leq 20)$,
	h)	$\mathrm{P}(X \leq 25)$,	i)	$\mathrm{P}(10 \leq X \leq 40)$,
	j)	$\mathrm{P}(X \geq 36)$,	k)	$\mathrm{P}(X \geq 35,5)$,
	l)	$\mathrm{P}(20,2 \leq X \leq 35,5)$,	m)	$\mathrm{P}(X < 20,5)$.

Příklad 7.29. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení s parametry $a = 2$, $b = 4$.

a) Určete hustotu $f(x)$.

b) Vypočtěte střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny X.

Vypočtěte:	c)	$\mathrm{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$,	d)	$\mathrm{P}(X > 2,78)$,
	e)	$\mathrm{P}(2,4 \leq X \leq 3,7)$,	f)	$\mathrm{P}(X < 2)$.

Příklad 7.30. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, a)$.Spočtěte šikmost a špičatost. S použitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:

a) $E(2X + 3)$;

b) $E(3X^2 - 2X + 1)$;

c) $D(2X + 3)$;

d) $D(X^2 + 1)$.

$\left[\text{a) } a + 3;\ \text{b) } a^2 - a + 1;\ \text{c) } a^2/3;\ \text{d) } 4a^4/45.\right]$

Příklad 7.31. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu (2,6). Vypočtěte:

a) $E(2X + 3)$;

b) $E(4X^2 - 5X + 2)$;

c) $D(6X - 7)$;

d) $D(X^2)$.

$\left[\text{a) } 11;\ \text{b) } 154/3\,\text{c) } 48\,\text{d) } 87.\right]$

Příklad 7.32. Nalezněte střední hodnotu, medián, dolní a horní kvartil, mezikvartilové rozpětí, dolní a horní decil náhodné veličiny X, která má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 2)$.

$[EX = 1,\ K_{0.5} = 1,\ K_{0.25} = 0.5,\ K_{0.75} = 1.5,\ IQR = 1,\ K_{0.1} = 0.2,\ K_{0.9} = 1.8]$

Příklad 7.33. Nalezněte střední hodnotu, medián, dolní a horní kvartil, mezikvartilové rozpětí, dolní a horní decil náhodné veličiny X, která má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 2$.

$$\left[EX = \tfrac{1}{2},\ K_{0.5} = 0.35,\ K_{0.25} = 0.14,\ K_{0.75} = 0.69,\ K_{0.1} = 0.05,\ K_{0.9} = 1.15\right]$$

Příklad 7.34. Nalezněte střední hodnotu, medián, dolní a horní kvartil, mezikvartilové rozpětí, dolní a horní decil náhodné veličiny X, která má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x & 0 \le x \le 1 \\ -\frac{x}{10} + \frac{1}{2} & 1 < x \le 5 \\ 0 \quad \text{jinak} \end{cases}$$

$$[EX = 2,\ K_{0.5} = 1.84,\ K_{0.25} = 1.13,\ K_{0.75} = 2.76,\ K_{0.1} = 0.71,\ K_{0.9} = 3.59]$$

Příklad 7.35. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu = 45$, $\sigma = 10$. Určete:

a) $\mathrm{P}(X \le 50)$, b) $\mathrm{P}(X \le 35{,}6)$, c) $\mathrm{P}(40{,}7 \le X \le 65{,}8)$,

d) $\mathrm{P}(22{,}9 \le X \le 33{,}2)$, e) $\mathrm{P}(X \ge 25{,}3)$, f) $\mathrm{P}(X \le 25{,}3)$.

[a) 0.69146, c) 0.98124, e) 0.97558]

Příklad 7.36. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu = 30$, $\sigma = 8$. Určete konstantu x_0 tak, aby

a) $\mathrm{P}(X \ge x_0) = 0{,}5$, b) $\mathrm{P}(X < x_0) = 0{,}025$,

c) $\mathrm{P}(X > x_0) = 0{,}1$, d) $\mathrm{P}(X > x_0) = 0{,}95$,

e) 10% hodnot X bylo menších než x_0,

f) 80% hodnot X bylo menších než x_0,

g) 1% hodnot X bylo větších než x_0.

[a) 30, c) 40.32, e) 19.75 g) 48.61]

Příklad 7.37. Náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 8. Načrtněte graf hustoty náhodné veličiny X. Do grafu zakreslete hodnotu μ a interval $\mu \pm 2\sigma$. Určete pravděpodobnost

a) $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$, b) $\mathrm{P}(X \ge \mu + 2\sigma)$,

c) $\mathrm{P}(X \le 92)$, d) $\mathrm{P}(92 \le X \le 116)$,

e) $\mathrm{P}(92 \le X \le 96)$, f) $\mathrm{P}(76 \le X \le 124)$.

[a) 0.9545, b) 0.02275]

Příklad 7.38. Náhodná veličina X má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 25. Víme, že pravděpodobnost, že X bude větší než 150 je 0,9. Určete střední hodnotu μ náhodné veličiny X.

[182.04]

Příklad 7.39. Jestliže náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$ takové, že $P(X < 85) = 0,90$ a $P(X < 95) = 0,95$, jaké jsou hodnoty μ a σ^2?

$$\left[\mu = 49,7; \sigma^2 = 758,9\right]$$

Příklad 7.40.

a) Nechť náhodná veličina $U \sim N(0,1)$. Nalezněte medián, dolní a horní kvartil a mezikvartilové rozpětí.

b) Nalezněte $\chi^2_{0.025}(25)$

c) Nalezněte $t_{0.99}(30)$ a $t_{0.05}(24)$

d) Nalezněte $F_{0.975}(5,20)$ a $F_{0.05}(2,10)$

$$[\text{a) } 0;\ -0.67449;\ 0.67449, \text{ b) } 13.12, \text{ c) } 2.4573;\ -1.7109, \text{ d) } 3.2891;\ 0.05156]$$

Příklad 7.41. Nechť náhodná veličina $T \sim t(14)$. Nalezněte konstantu c tak, aby $P(-c < T < c) = 0.9$.

$$[1.7613]$$

Příklad 7.42. Nechť náhodná veličina $X \sim F(5,8)$. Nalezněte konstanty a a b tak, aby $P(X \leq a) = 0.05$ a $P(X \leq b) = 0.95$.

$$[0.2075;\ 3.6875]$$

Příklad 7.43. Vypočtěte momentové charakteristiky náhodné veličiny X, která má hustotu $f(x) = Ae^{-|x|}$pro $-\infty < x < \infty$.

$$[A = 1/2; E(X) = 0; D(x) = 2; A3 = 0; A4 = 3.]$$

Příklad 7.44. Nechť $(X,Y)'$ má hustotu pravděpodobnosti $f(x,y)$. Nalezněte $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x + y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\left[E(X) = \tfrac{5}{12},\ D(X) = \tfrac{11}{144},\ E(Y) = \tfrac{7}{12},\ D(Y) = \tfrac{11}{144}\right]$$

Příklad 7.45. Hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je tvaru

$$f(x,y) = \begin{cases} 24x^2y(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny X.

b) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny Y.

c) Rozhodněte, zda jsou stochasticky nezávislé.

d) Nalezněte střední hodnotu a rozptyl veličiny X.

[a) $f_X(x) = 12x^2(1-x)$ pro $0 < x < 1$, 0 jinak, b) $f_Y(y) = 2y$ pro $0 < y < 1$, 0 jinak, c) nejsou, d) $E(X) = 3/5,\ D(X) = 1/25$]

Příklad 7.46. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)'$ je rovna

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy(1-x^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že jsou X a Y nezávislé. A nalezněte střední hodnotu a rozptyl veličin X a Y.

Příklad 7.47. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)'$ je rovna

$$f(x,y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte marginální hustoty náhodných veličin X a Y. Spočtěte korelaci veličin X, Y.

[$f_X(x) = \mathrm{e}^{-x},$ pro $x > 0, 0$ jinak.$f_Y(y) = (1+y)^{-2},$ pro $y > 0, 0$ jinak.]

Příklad 7.48. Nechť X a Y mají rovnoměrné rozdělení na níže uvedené množině G. Určete kovarianci a korelační koeficient.

$$G = \{(X, Y)' \in \mathcal{R}^2 :\ 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1,\ x + y \le 1\}$$

[$\mathrm{C}(X,Y) = -1/36,\ \mathrm{R}(X,Y) = -1/2$]

Příklad 7.49. Nechť X a Y mají rovnoměrné rozdělení na níže uvedené množině G.

$$G = \{(X, Y)' \in \mathcal{R}^2 :\ 0 < x < y < 1\}$$

a) Určete kovarianci a korelační koeficient.

b) Nalezněte obě regresní přímky.

c) Ověřte, zda X a Y jsou stochasticky nezávislé.

[a) $\mathrm{C}(X,Y) = 1/36,\ \mathrm{R}(X,Y) = -1/2,$ b) $Y = (X+1)/2,\ X = Y/2,$ c) nejsou]

Příklad 7.50. Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2},1) \cup (\frac{1}{2},1) \times (0,\frac{1}{2}), \\ 2, & (x,y) \in (\frac{1}{2},1) \times (\frac{1}{2},1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte korelační koeficient $\rho_{X,Y}$. (Doplňující úloha: takto zadanou hustotu načrtněte a ověřte, zda skutečně má vlastnosti, které má hustota mít. Ověřte tyto vlastnosti i u spočtených marginálních hustot.)

$[\rho_{X,Y} = -\frac{3}{13}.]$

Příklad 7.51. Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte marginální hustoty veličin X a Y, dále vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y, \mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$ a $\rho_{X,Y}$.

$[\mathrm{E}X = 0, \mathrm{E}Y = 0, \mathrm{D}X = \frac{1}{4}, \mathrm{D}Y = \frac{1}{4}, \rho_{X,Y} = 0.]$

Příklad 7.52. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = 1$.

a) Nalezněte marginální hustoty náhodné veličiny X a náhodné veličiny Y.
b) Vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y, \mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$.
c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

$\left[\text{a) } f_X(x) = f_Y(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \text{ pro } -1 < x < 1, 0 \text{ jinak. b) } \mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 0\right]$

Příklad 7.53. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na oblasti: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny X.
b) Nalezněte marginální hustotu náhodné veličiny Y.
c) Vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y$.
d) Vypočtěte $\mathrm{C}(X,Y)$. Přesvědčte se, že náhodné veličiny X a Y jsou nekorelované, ale závislé.

$\left[\begin{array}{l}\text{a) } f_X(x) = \frac{2}{\pi a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ pro } |x| < a, \text{ 0 jinak.} \\ \text{b) } f_Y(y) = \frac{2}{\pi b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \text{ pro } |y| < b, \text{ 0 jinak.}\end{array}\right]$

Příklad 7.54. Náhodný vektor $(X, Y, Z)'$ má hustotu $f(x, y, z)$ rovnou konstantě c, když $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Jinak je hustota $(X, Y, Z)'$ rovna 0.

a) Stanovte konstantu c.

b) Nalezněte marginální hustoty náhodných veličin X, Y, Z.

c) Nalezněte marginální hustoty vektorů $(X, Y)'$ a $(X, Z)'$.

d) Vypočtěte $\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y, \mathrm{E}Z, \mathrm{D}X, \mathrm{D}Y, \mathrm{D}Z, \mathrm{C}(X, Y)'$ a $\mathrm{var}(X, Y, Z)'$.

Příklad 7.55. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)'$ je tvaru

$$f(x, y) = \begin{cases} [(1 + ax)(1 + ay) - a]\, \mathrm{e}^{-x-y-axy}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $0 < a < 1$. Určete

a) marginální hustoty náhodných veličin X, Y.

b) distribuční funkci $(X, Y)'$.

c) střední hodnoty $\mathrm{E}X,\ \mathrm{E}Y$, rozptyly $\mathrm{D}X,\ \mathrm{D}Y$ a kovarianci $\mathrm{C}(X, Y)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } f_X(x) = f_Y(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ pro } x > 0, \text{ 0 jinak,} \\ \text{b) } F(x, y) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{-x-y-axy} - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \end{array}\right]$$

Příklad 7.56. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)'$ je rovna

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-y}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte marginální hustoty náhodných veličin X a Y.

$\left[f_X(x) = \mathrm{e}^{-x},\ \text{pro } x > 0, 0 \text{ jinak.} f_Y(y) = (1+y)^{-2},\ \text{pro } y > 0, 0 \text{ jinak.}\right]$

Příklad 7.57. Hustota náhodného vektoru (X_1, X_2) je rovna

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte hustotu náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$. Spočtěte $D(Y)$.

$$\left[f_Y(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z \leq 1, \\ z(2 - z), & 1 < z \leq 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \right]$$

Příklad 7.58. Trolejbusy městské dopravy odjíždějíze stanice v pětiminutových intervalech. Cestující může přijít na stanici v libovolném okamžiku. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka doby jeho čekání na odjezd ze stanice?

$[E(X) = 2,5; D(X) = 2,08.]$

Příklad 7.59. Výrobní zařízení má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Předpokládejme, že "doba čekání" na poruchu je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením. Stanovte hodnotu t tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat delší dobu než t, byla 0,99.

$[20,5]$

Příklad 7.60. Životnost určitého výrobku se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 3 roky. Jak dlouhou záruční dobu poskytne výrobce zákazníkům, jestliže žádá, aby relativní četnost výrobků, které během záruční doby přestanou plnit svou funkci, byla v průměru 0,1?

$[0,32]$

Úpravy

Příklad 7.61. Nechť $\mathrm{E}(X^2) = 65$ a $\mathrm{E}(X) = 7$. Určete směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

$\left[\sqrt{\mathrm{D}(X)} = 4.\right]$

Příklad 7.62. Nechť $\mathrm{E}(X) = 3$ a $\mathrm{E}[X(X-1)] = 6$. Určete rozptyl $\mathrm{D}(X)$.

Příklad 7.63. Nechť $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y) = \mathrm{C}(X,Y) = 1$. Vypočtěte

a) $\mathrm{D}(3-X)$, b) $\mathrm{C}(X,X)$,

c) $\mathrm{D}(2X+4)$, d) $\mathrm{C}(X,X+Y)$,

e) $\mathrm{D}(X-Y)$, f) $\mathrm{D}(4X+Y-7)$,

[a) 1, b) 1, c) 4, d) 2, e) 0, f) 25.]

Příklad 7.64. Uvažujme náhodnou veličinu X se střední hodnotou $E(X) = -1$, rozptylem $D(X) = 4$ a náhodnou veličinu $Y = 2 - 3X$. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y, kovarianci a koeficient korelace veličin X,Y.

$[E(Y) = 5; D(Y) = 36; C(X,Y) = -12; R(X,Y) = -1.]$

Příklad 7.65. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Vypočtěte

a) $\mathrm{D}(2X+Y)$, b) $\mathrm{C}(2X+Y, X-Y)$,

c) $\rho_{X,Y}$, d) $\rho_{U,V}$, kde $U = 2X+Y$, $V = X-Y$.

$\left[\text{a) } 5, \text{ b) } 1, \text{ c) } 0, \text{ d) } \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

Příklad 7.66. Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu $E(X) = \mu$ a rozptyl $D(X) = \sigma^2$. Určete

a) $E(Y)$ a $D(Y)$, kde $Y = X - E(X)$

b) $E(U)$ a $D(U)$, kde $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$\left[\text{a) } E(Y) = 0,\ D(Y) = \sigma^2,\ \text{b) } E(U) = 0,\ D(U) = 1\right]$

Příklad 7.67. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se stejnými středními hodnotami μ a rozptyly $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, $\overline{X}$ je jejich průměr. Spočtěte $\mathrm{D}(\overline{X})$.

$\left[\mathrm{D}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2.\right]$

Příklad 7.68. Určete střední hodnotu veličiny $Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3$, je-li známo, že $E(X) = -2$, $E(Y) = 4$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 9$, $\mathrm{R}(X,Y) = -0.5$.

[68]

Příklad 7.69. Nechť X_1, X_2 a X jsou nezávislé náhodné veličiny, pro které platí $\mathrm{E}X_1 = 1$, $\mathrm{E}X_2 = 2$, $\mathrm{E}X = 3$, $\mathrm{D}X_1 = 4$, $\mathrm{D}X_2 = 5$, $\mathrm{D}X = 6$. Položme $Y = X_1 + X$, $Z = X_2 - X$. Vypočtěte korelační koeficient $\rho_{Y,Z}$, parciální korelační koeficient $\rho_{Y,Z.X}$ a koeficient mnohonásobné korelace $\rho_{X,(Y,Z)}$.

$\left[\rho_{Y,Z} = -\frac{6}{\sqrt{110}}, \rho_{Y,X} = 0, \rho_{X,(Y,Z)} = \frac{9}{\sqrt{111}}.\right]$

Příklad 7.70. Nechť $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor o rozměrech 3×1,

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Položme $Z = X_1 - 2X_2 + X_3$. Najděte $\mathrm{D}(Z)$

b) Najděte varianční matici $\mathrm{var}(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{var}(Y_1, Y_2)'$, když $Y_1 = X_1 + X_2$ a $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$.

$$\left[\mathrm{D}(Z) = 17, \mathrm{var}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.\right]$$

Příklad 7.71. Nekorelované náhodné veličiny X a Y mají rozptyly $D(X) = k$ a $D(Y) = 2$. Čemu je rovno k, jestliže rozptyl náhodné veličiny $Z = 3Y - X$ je $D(Z) = 25$?

$[k = 7.]$

Příklad 7.72. Nekorelované náhodné veličiny X_1, X_2, X_3, X_4 mají identický zákon rozdělení s hustotou

$$f(x_i) = \begin{cases} 2x_i, & 0 < x_i < 1, i = 1,2,3,4 \\ 0, & jinak \end{cases}$$

Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Y = 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4$.
$[E(Y) = 2; D(Y) = 7/18.]$

Příklad 7.73. Najděte korelační matici náhodného vektoru $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]'$, jehož kovarianční matice je

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}.\right]$$

Příklad 7.74. Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor a uvažujme náhodné veličiny $Y_1 = X_1$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$. Najděte varianční matici $\operatorname{var}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{var}(X_1, X_2, \dots, X_n)'$ za předpokladu, že náhodné veličiny Y_i jsou navzájem nezávislé a každá z nich má stejný rozptyl σ^2.

$$\left[\mathrm{C}(X_i, X_j) = \begin{cases} i\sigma^2, & i \le j, \\ j\sigma^2, & i > j. \end{cases}\right]$$

Příklad 7.75. Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor a uvažujme náhodné veličiny $Y_1 = X_1$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$. Najděte varianční matici $\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}) = \operatorname{var}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ za předpokladu, že náhodné veličiny X_i jsou navzájem nezávislé a každá z nich má stejný rozptyl σ^2.

$$\left[\operatorname{var}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma^2 & 2\sigma^2 & -\sigma^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\sigma^2 & 2\sigma^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\sigma^2 \\ 0 & \cdots & 0 & -\sigma^2 & 2\sigma^2 \end{pmatrix}\right]$$

Příklad 7.76. Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny, které mají stejný rozptyl σ^2. Položme $Z_1 = X_1$ a $Z_{i+1} = \rho Z_i + a$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, kde a a ρ jsou reálná čísla. Najděte varianční matici $\operatorname{var}(\boldsymbol{Z}) = \operatorname{var}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$.
$[\mathrm{C}(Z_i, Z_j) = \rho^{i+j-2}\sigma^2.]$

Důkazy

Příklad 7.77. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se stejnými středními hodnotami μ a rozptyly $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Dokažte, že $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/[n(n-1)]$ je nestranným odhadem $\mathrm{D}(\overline{X})$.

Příklad 7.78. Nechť náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mají stejné střední hodnoty μ, stejné rozptyly σ^2 a korelace libovolného páru těchto různých náhodných veličin je rovna konstantě ρ. Najděte $\mathrm{D}(\overline{X})$ a ukažte odtud, že $\frac{-1}{n-1} \leq \rho \leq 1$.

$\left[\mathrm{D}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}(1 + \rho(n-1)).\right]$

Příklad 7.79. Nechť $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Položme

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$

Dokažte, že S^2 je nestranným odhadem σ^2.

Příklad 7.80. Nechť $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Položme

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2,$$

$$Q = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i-1} - X_i)^2.$$

a) Dokažte, že $\mathrm{var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

b) Dokažte, že Q je nestranný odhad parametru σ^2.

Příklad 7.81. Nechť náhodné veličiny X a Y mají stejný rozptyl. Dokažte, že $\mathrm{C}(X+Y, X-Y) = 0$. Najděte protipříklad, kterým ukážete, že z nulovosti této kovariance neplyne nezávislost těchto náhodných veličin.

[Protipříklad: $X = Z_1 + Z_3$, $Y = Z_1 + Z_2$, kde Z_i jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozptylem $\sigma^2 > 0$.]

Příklad 7.82. Nechť každá z náhodných veličin X a Y nabývá pouze hodnot 0 a 1, přičemž $P(X = i, Y = j) = p_{ij}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$. Dokažte, že tyto veličiny jsou nezávislé právě tehdy, když $\mathrm{C}(X, Y) = 0$.

Příklad 7.83. Nechť náhodná veličina X má symetrickou hustotu ($f(-x) = f(x)$) a nulové střední hodnoty. Předpokládejme navíc, že existují její 3. momenty. Dokažte, že $\mathrm{C}(X, X^2) = 0$.

Příklad 7.84. Nechť hustota náhodných veličin X, Y a Z má tvar

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{8}(1+xyz) & -1 \le x,y,z \le 1, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Dokažte, že tyto veličiny jsou po dvou nezávislé, ale nejsou vzájemně nezávislé.

Příklad 7.85. Nechť náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mají stejné střední hodnoty μ a jsou stochasticky nezávislé. Položme

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

$$Q_2 = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \cdots + (X_{n-1} - X_n)^2 + (X_n - X_1)^2.$$

Dokažte, že

$$\mathrm{E}\left[\frac{3Q_1 - Q_2}{n(n-3)}\right] = \mathrm{var}(\overline{X}).$$

Příklad 7.86. Nechť korelační koeficient ρ náhodných veličin X a Y existuje. Ukažte, že $-1 \le \rho \le 1$. [Vezměte v úvahu diskriminant nezáporné kvadratické funkce $g(v) = \mathrm{E}\left\{[(X-\mu_1) + v(Y-\mu_2)]^2\right\}$, kde reálné číslo v není funkcí X ani Y.]

Příklad 7.87. Nechť $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ jsou náhodné vektory o rozměrech $m \times 1$ a $n \times 1$, $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou reálné vektory o rozměrech $m \times 1$ a $n \times 1$. Dokažte, že pro kovarianční matici platí

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{b}) = \mathrm{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}).$$

Příklad 7.88. Dokažte, že $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}') - (\mathrm{E}\boldsymbol{X})(\mathrm{E}\boldsymbol{Y})'$.

Příklad 7.89. Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice a $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor. Dokažte, že $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}) = \mathrm{tr}[\mathbf{A}\mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')]$, kde $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ značí stopu matice $\mathbf{A}$.

Příklad 7.90. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením $N(0, \sigma^2)$ a $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou symetrické reálné matice o rozměrech $n \times n$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor. Dokažte, že $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'\mathbf{B}\boldsymbol{X}) = 2\sigma^4 \mathrm{tr}(\mathbf{AB})$.

Obsah

Literatura

[1] Feller, V.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume I. Ruský překlad: Izdatelstvo Mir, Moskva, 1967.

[2] Jemeljanov, G. V., Skitovič, V. P.: Zadačnik po teorii věrojatnostěj i matematičeskoj statistike. Izdatelstvo Leningradskovo universitěta, Leningrad, 1967.

[3] Seitz, J.: Úvod do počtu pravděpodobnosti. UK, Praha, 1968.

[4] Svešnikov, A. A.: Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti matematické statistiky a teorie náhodných funkcí. SNTL, Praha, 1971.

[5] Dupač V., Hušková M.: Pravděpodobnost a matematická statistika, Karolinum, Praha, 2001.

[6] Hebák P., Kahounová J.: Počet pravdeěpodobnosti v příkladech, SNTL, Praha, 1988.

[7] Kříž, O.: Sbírka úloh ze statistiky I. VVŠ PV Vyškov, 1999.

[8] Budíková, M.; Mikoláš, Š.; Osecký, P.: Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Brno, 2002.

[9] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. SPN, Praha, 1988.

[10] Calda, E.; Dupač, V.: Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus, Praha, 1994.